

SIMULATION D'UNE ÉPIDÉMIE

R.Coquidé (13/02/2021)

Dans cette étude on note indistinctement : $\text{Log}(x) = \ln(x)$ (log népérien)

I) LE MODÈLE « SIR »

Considérons un pays (non précisé) de population de $N = 67\,000\,000$ d'habitants soumis à une attaque virale se propageant entre humains. On se propose de programmer, en **J**, une simulation de cette épidémie.

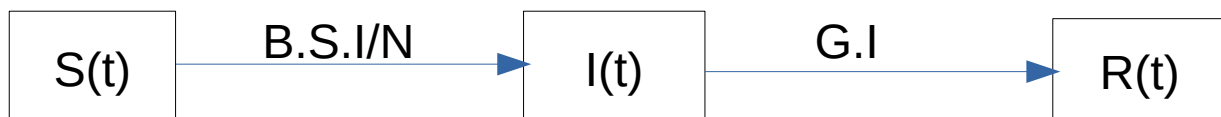
Rappelons un vieil adage qui devrait être écrit en 1^e page de tout ouvrage traitant de statistiques ou de simulation informatique :

**« Tous les modèles mathématiques sont faux,
Mais certains peuvent être utiles. »**

Un « excellent modèle mathématique » devrait être simple à comprendre et à programmer, nécessiter peu de variables, peu de précision de leurs valeurs initiales, peu de paramètres (eux-mêmes facilement mesurables), et devrait fournir, rapidement, une grande précision concernant l'évolution des variables décrivant le phénomène étudié.

C'est parfaitement utopique !

Le modèle « **S I R** », connu depuis les années 1920, est étudié ici. La population est divisée en 3 parties **S**, **I** et **R** :



S : nombre d'individus Sains et Ssceptibles d'être infectés

I : nombre d'individus Infectés et contaminants

R : nombre d'individus Rétablis, immunisés non contaminants

N : population totale. On a $N = S(t) + I(t) + R(t)$ pour tout $t \geq 0$

G : taux de guérison = $1 /$ durée moyenne d'infection (en nb de jours)

B : taux de contamination

Systeme d'équations (a)

$$S(t+h) = S(t) - (B.S(t).I(t)/N).h$$

$$I(t+h) = I(t) + (B.S(t).I(t)/N - G.I(t)).h$$

$$R(t+h) = R(t) + G.I(t).h$$

unité de temps : jour

h : pas

Entre les temps t et $t+h$, le nombre des nouveaux contaminés est proportionnel au nombre des contacts possibles $S(t) \cdot I(t)$ multiplié par un facteur fonction décroissante de N (la probabilité moyenne de chaque contact possible est fonction décroissante de N) et enfin par h .

Dans ce modèle on utilise (arbitrairement !?!) B/N , ce qui suppose la population parfaitement homogène (!?!).

Système d'équations (b)

A partir du système (a), dans les 2 membres de chacune des 3 équations, on retranche respectivement $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$, on divise tout par h et on fait tendre h vers 0. On obtient le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} dS/dt &= - B.S(t).I(t)/N \\ dI/dt &= B.S(t).I(t)/N - G.I(t) \\ dR/dt &= G.I(t) \end{aligned}$$

Enfin, on note $s(t)=S(t)/N$, $i(t)=I(t)/N$, $r(t)=R(t)/N$. On obtient alors le système d'équations différentielles :

$ds/dt = - B.s(t).i(t)$	(b1)
$di/dt = B.s(t).i(t) - G.i(t)$	(b2)
$dr/dt = G.i(t)$	(b3)
$s(t) + i(t) + r(t) = 1$	(b4)

(pour tout t positif ou nul)

$s(t)$ = proportion dans la population d'individus sains et susceptibles de devenir infectés.

$i(t)$ = proportion dans la population des individus infectés et contaminants.

$r(t)$ = proportion dans la population des individus rétablis et immunisés après avoir été infectés.

Confinement, tests et isolation, médicament.

Si une proportion $C1$ de la population est confinée, le nombre des contacts possibles $S(t).I(t)$ devient $(1-C1)^2.S(t).I(t)$, ce qui revient à **remplacer B par $B1 = B.(1-C1)^2$** .

Si une proportion $C2$ des infestés est isolée après test, le nombre des contacts possibles $S(t).I(t)$ devient $(1-C2).S(t).I(t)$, ce qui revient à **changer B en $B1 = B.(1-C2)$** .

Si un médicament diminue d'une proportion $C3$ la durée d'infection, le nombre des guérisons $G.I(t)$ devient $G.I(t)/(1-C3)$, ce qui revient à **remplacer G par $G1 = G/(1-C3)$** .

Si certaines personnes portent un masque, se lavent ou se désinfectent fréquemment les mains, respectent une « distanciation sociale », ou si on institue un couvre-feux, c'est équivalent au confinement précédent avec une certaine valeur de **C1**.

On aura donc dans tous les cas (avec C1,C2,C3 éventuellement nuls) :

B remplacé par $B1 = B.(1 - C1)^2.(1 - C2)$

G remplacé par $G1 = G/(1 - C3)$

$C1, C2, C3 \in [0 ; 1[$

C1 : proportion de confinés dans la population,

C2 : proportion d'infectés qui sont isolés après test.

C3 : diminution relative de la durée d'infection par un médicament.

$L=B/G$ devra être remplacée par $L1=B1/G1=L.(1-C1)^2.(1-C2).(1-C3)$

D'où le système (c) d'équations (utilisé pour une étude analytique) :

$$ds/dt = - B1.s(t).i(t) \quad (c1)$$

$$di/dt = B1.s(t).i(t) - G1.i(t) \quad (c2)$$

$$dr/dt = G1.i(t) \quad (c3)$$

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1 \quad (c4)$$

Le nombre moyen de personnes contaminées par 1 infecté pendant la durée de son infection est $nc(t) = L1.s(t)$

Pour une simulation numérique, on remplace une dérivée par une approximation. La variable t cesse d'être continue (pas = 1 jour).

$t \Rightarrow k \in \{0 1 2 3 \dots NJ\}$, k étant le numéro du jour (de 0 à NJ)

$(df/dt) \Rightarrow (f_{k+1}-f_k)/1$ qui est une approximation d'**ordre 1** :

On lui préférera, si possible, une approximation d'**ordre 2** :

$(df/dt) \Rightarrow (f_{k+1} - f_{k-1})/2$

Systeme d'équations (d)

Ordre 1

$$S_k = S_{k-1} - B1 \cdot S_{k-1} \cdot i_{k-1}$$

$$i_k = i_{k-1} + B1 \cdot S_{k-1} \cdot i_{k-1} - G1 \cdot i_{k-1}$$

$$r_k = r_{k-1} + G1 \cdot i_{k-1}$$

$$S_k + i_k + r_k = 1$$

$$1 \leq k \leq NJ$$

Ordre 2

$$S_k = S_{k-2} - 2 \cdot B1 \cdot S_{k-1} \cdot i_{k-1}$$

$$i_k = i_{k-2} + 2 \cdot B1 \cdot S_{k-1} \cdot i_{k-1} - 2 \cdot G1 \cdot i_{k-1}$$

$$r_k = r_{k-2} + 2 \cdot G1 \cdot i_{k-1}$$

$$S_k + i_k + r_k = 1$$

$$2 \leq k \leq NJ$$

A) Approche analytique du modèle « SIR »

On ne sait pas résoudre (au moyen d'une solution générale) le système (c) d'équations différentielles non linéaires.

Dans ce qui suit, on pose $L1 = B1/G1$ (dans la littérature, L1 est souvent noté R0 ce qui est ambigu).

Si, au temps $t=0$ il y a $I(0)=1$ infecté, $S(0) = N-1$ et $R(0) = 0$

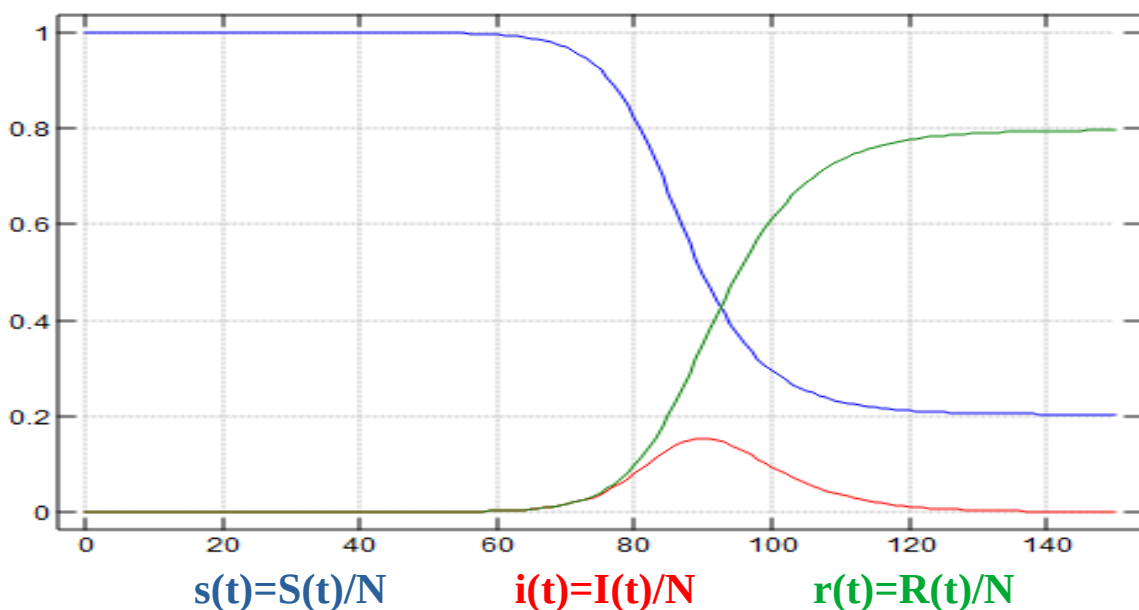
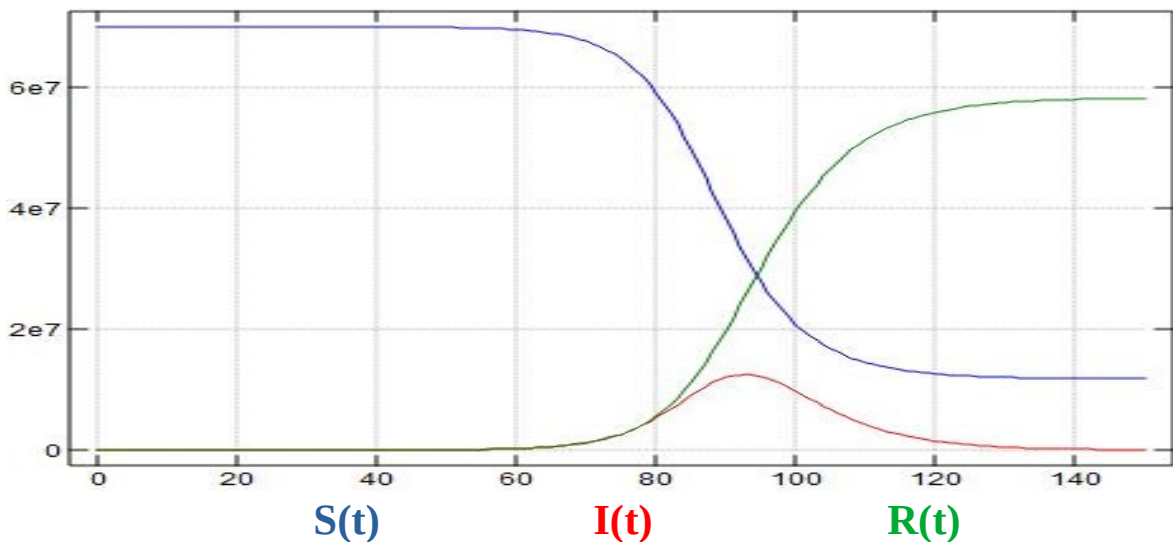
$$(c2) \implies (dI/dt)_{t=0} = B1.S(0).I(0)/N - G1.I(0) = B1.(N-1)/N - G1 \approx B1-G1$$

Il ne peut y avoir épidémie que si $B1-G1 > 0$ c'est-à-dire $L1 > 1$

Epidémie si $L1 > 1$; Cas isolé sans épidémie si $L1 < 1$ (c5)

On suppose dans la suite $L1 = B1/G1 > 1$

Voici l'allure générale des courbes (ici sur $NJ = 150$ jours) :



a) Étude des constantes caractéristiques

Dans ce qui suit, nous noterons :

$$\begin{aligned}
 L &= B/G \quad ; \quad L1 = B1/G1 = L \cdot (1-C1)^2 \cdot (1-C2) \cdot (1-C3) \\
 s0 &= s(0) \quad ; \quad i0 = i(0) \quad ; \quad r0 = r(0) \quad (\text{conditions initiales}) \\
 T &= \text{valeur de } t \text{ où } i(t) \text{ atteint son maximum } i(T) \\
 sT &= s(T) \quad ; \quad iT = i(T) = \max i(t) \quad ; \quad rT = r(T) \\
 \text{sinf} &= \lim (t \rightarrow \infty) s(t) \quad ; \quad \text{iinf} = 0 \quad ; \quad \text{rinf} = \lim (t \rightarrow \infty) r(t)
 \end{aligned}$$

On trouve (voir annexe mathématique A1) :

$$\text{Log}(s(t)+L1.r(t)) = A = \text{cste} = \text{Log}(s0)+L1.r0 \quad t \in [0, \infty[\quad (\text{c5})$$

$$sT = 1/L1 \quad (\text{c6})$$

$$iT = 1 - r0 - (1+\text{Log}(L1.s0))/L1 \quad (\text{c7})$$

$$rT = r0 + \text{Log}(L1.s0)/L1 \quad (\text{c8})$$

Le maxi de rT est $rT_{\max} = r0 + s0/e = r0 + 0,368.s0$ pour $L1 = e/s0 = 2,718/s0$

$$\text{sinf} = y \quad \text{et} \quad \text{rinf} = 1 - y \quad \text{où } y \text{ est solution de l'équation :} \quad (\text{c9})$$

$$\text{Log}(y) - L1.y + A1 = 0 \quad \text{où} \quad 0 < y < sT$$

$$\text{avec } A1 = L1.(1 - r0) - \text{Log}(s0) = L1 - A$$

$$T = \frac{1}{B1.b} \cdot \ln\left(1 + \frac{b}{a} \cdot (s0 - sT)\right) - \frac{1}{B1} \cdot \int_0^{s0-sT} \left(\frac{\text{Num}(y)}{\text{Den}(y)}\right) \cdot dy \quad (\text{c10})$$

$$\text{où :} \quad a = s0 \cdot i0 \quad b = s0 - i0 - sT$$

$$\text{Num}(y) = sT \cdot y + y^2 + sT \cdot (s0 - y) \cdot \text{Log}(1 - y/s0)$$

$$\text{Den}(y) = (a + b \cdot y) \cdot (s0 - y) \cdot (i0 + y + sT \cdot \text{Log}(1 - y/s0))$$

Ces résultats sont programmés dans l'espace de travail

« **EPIDEMIE-CONSTANTES-SIR.ijs** » présenté dans l'annexe

informatique **B1**. Le pro-adverbe « **Constantes_SIR** » permet de calculer ces constantes :

$$\text{Res} = . (S0,I0,R0) \text{ Constantes_SIR } N,B,G,C1,C2,C3$$

$$\text{Res} = . \text{ Constantes_SIR } N,B,G,C1,C2,C3$$

$$(\text{par défaut : } S0=N-1 \ ; \ I0=1 \ ; \ R0=0)$$

$$'B1 \ G1 \ L1 \ s0 \ i0 \ r0 \ T \ sT \ iT \ rT \ \text{sinf} \ \text{rinf}' = . \text{ Res}$$

b) Simulation numérique « SIR »

Les calculs (voir annexe mathématique **A2**) sont programmés (voir annexe informatique **B2**). L'espace de travail « **EPIDEMIE-SIR.ijs** » se trouve en **B2** et contient 2 pro-adverbes : « **SIR** » et « **MULTI_SIR** ».

Utilisation :

Res =. (S0, I0, R0) NJ SIR N, B, G, C1, C2, C3

Res =. NJ SIR N, B, G, C1, C2, C3

(par défaut S0=N-1 ; I0=1 ; R0=0)

's i r nc' =. Res

Conditions initiales au jour k=0 :

S0 : nombre d'individus sains susceptibles d'infection

I0 : nombre d'individus infectés

R0 : nombre d'individus rétablis après infection

NJ : nombre de jours de simulation

Paramètres :

N : population

B : proportion de contacts créant une infection par jour

G : 1/ durée moyenne d'infection en nb de jours

C1 : proportion d'individus confinés dans la population

C2 : proportion d'infectés testés et isolés

C3 : proportion de réduction de la durée d'infection par un médicament

Résultats :

Res : matrice de 4 lignes et **NJ** colonnes

s : proportion d'individus sains (vecteur de **NJ** composantes)

i : proportion d'infectés (vecteur de **NJ** composantes)

r : proportion de rétablis après infection (vecteur de **NJ** composantes)

nc : nombre moyen de contaminés par 1 infecté pendant la durée de son infection (vecteur de **NJ** composantes ; on a **nc(0) = L1**).

(Remarque : **nc** et **L1** sont souvent nommés **R0**, ce qui est ambigu).

MULTI_SIR avec divers paramètres sur plusieurs périodes :

Utilisation :

Res = . (S0 , I0, R0) NJ MULTI_SIR Par

Res = . NJ MULTI_SIR Par

(par défaut S0=N-1; I0=1; R0=0)

NJ : vecteur de **NP** composantes (**NP** : nb de périodes)

Par = . N ; B ; G ; C1 ; C2 ; C3

(**Par** : vecteur de boîtes contenant chacune **1** nombre ou **NP** nombres)

's i r nc' = . Res

Conditions initiales au jour k=0 :

S0 : nombre d'individus sains susceptibles d'infection

I0 : nombre d'individus infectés

R0 : nombre d'individus rétablis après infection

NJ : vecteur de **NP** composantes (nb de jours de chaque période)

Paramètres : **Par = . N ; B ; G ; C1 ; C2 ; C3**

(chaque boîte de **Par** contient **1** nombre ou **NP** nombres)

N : population

B : proportion de contacts créant une infection par jour

G : 1/ durée moyenne d'infection en nb de jours

C1 : proportion d'individus confinés dans la population

C2 : proportion d'infectés testés et isolés

C3 : proportion de réduction de la durée d'infection par un médicament

Résultats : en posant **nj** = 1 + somme des **NJ** jours de chaque période

Res : matrice de 4 lignes et **nj** colonnes

s : proportion d'individus sains (vecteur de **nj** composantes)

i : proportion d'infectés (vecteur de **nj** composantes)

r : proportion de rétablis après infection (vecteur de **nj** composantes)

nc : nombre moyen de contaminés par **1** infecté pendant la durée de son infection (vecteur de **nj** composantes).

(Remarque : **nc** et **L1** sont souvent nommés **R0**, ce qui est ambigu).

B) Utilisation du système d'équations (d) pour une simulation

On exécute le pro-adverbe « SIR » (voir annexe B2) sur NJ jours.

Utilisation :

's i r nc' =. Res =. (S₀, I₀, R₀) NJ SIR N,B,G,C1,C2,C3
's i r nc' =. Res =. NJ SIR N,B,G,C1,C2,C3
(par défaut S₀=N-1 I₀=1 R₀=0)

En entrée :

(S₀,I₀,R₀) : valeurs initiales des variables S I R

N,B,G,C1,C2,C3 : valeurs des paramètres

N : population

B :

G :

C1 :

C2 :

C3 :

NJ : nombre de jours de simulation

En sortie 4 vecteurs de NJ+1 composantes :

s : proportion de « susceptibles sains»

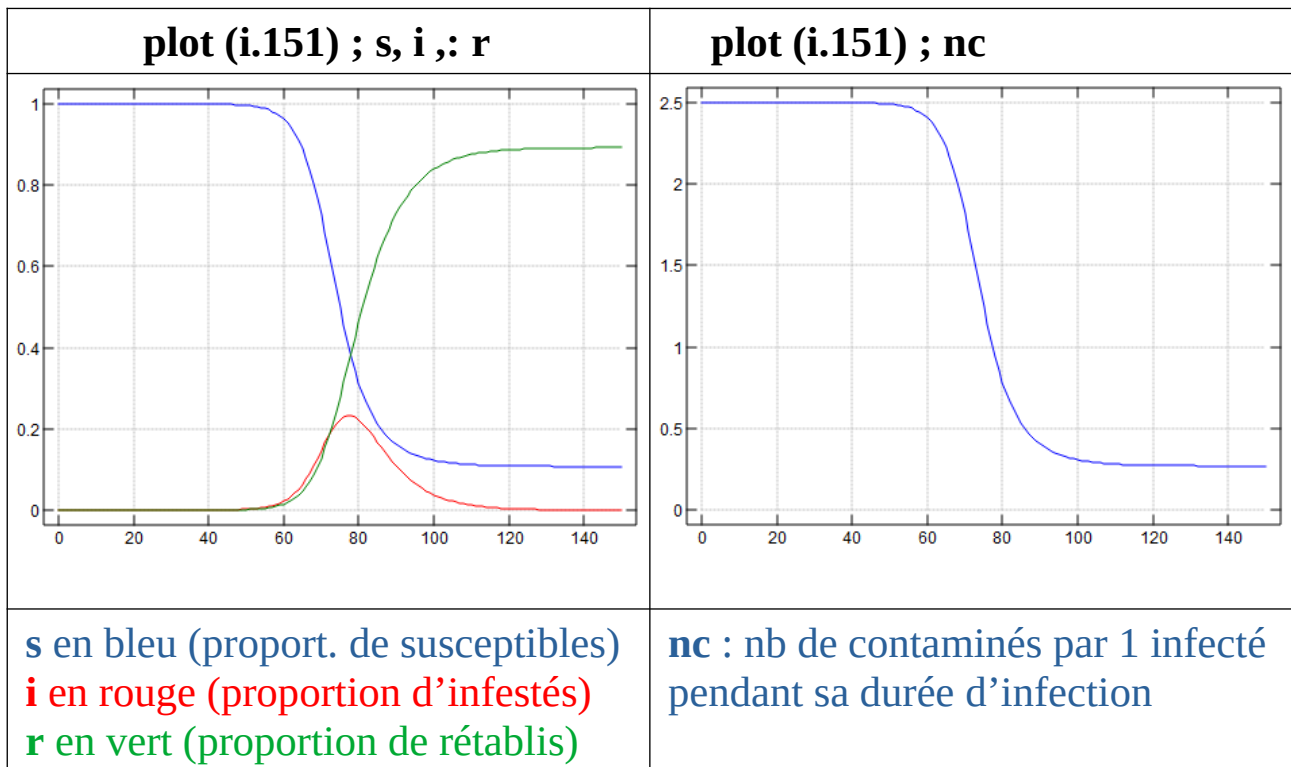
i : proportion d'« infectés »

r : proportion de « rétablis immunisés et non contagieux»

nc : nombre de nouveaux contaminés par 1 seul infecté pendant
la durée de son infection

Res : matrice de 4 lignes et NJ+1 colonnes

Ex1 : 's i r nc' =. 150 SIR 6.7e7 0.4 0.16 0 0 0



Re =. Constantes_SIR 6.7e7 0.4 0.16 0 0 0

'B1 G1 L1 s0 i0 r0 T sT iT rT sinf rinf' =. Re

L1, T, iT, sinf, rinf

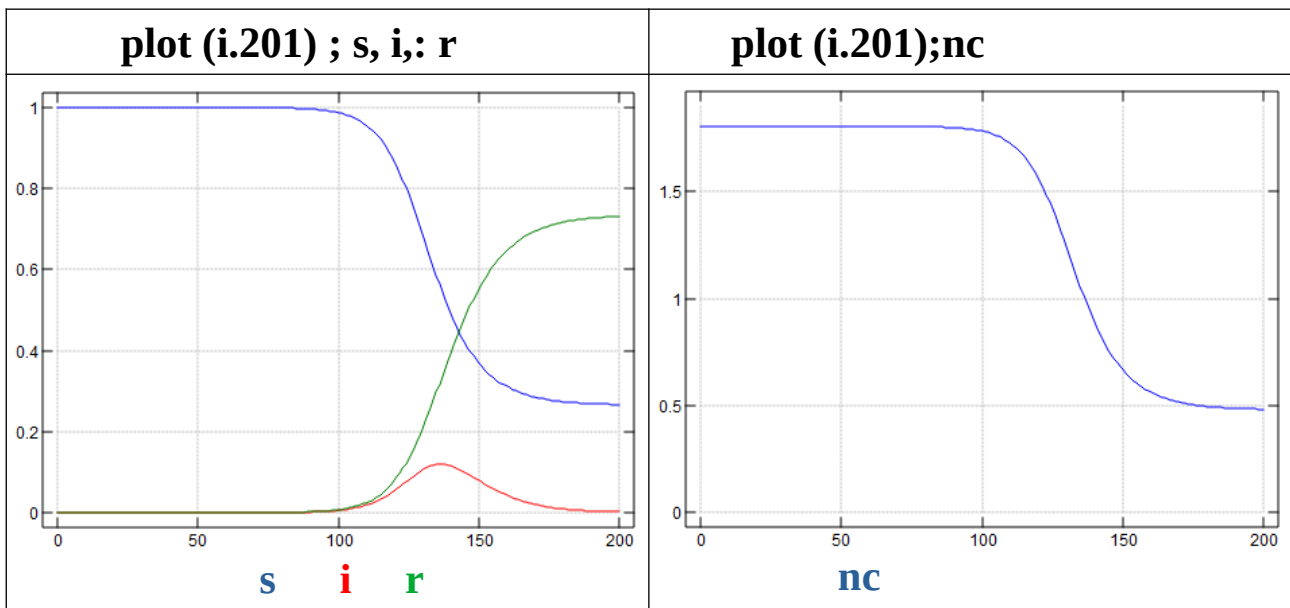
2.5 76.7893 0.233484 0.107355 0.892645

Dans cet exemple, la durée moyenne d'infection est de $1/0,16=6,25$ jours. Le pic épidémique est $iT=0,23$ pour $T=77^e$ jours (presque 1/4 de la population : c'est une catastrophe!). Le nombre moyen de contaminations par 1 infecté, $nc = s \cdot L1$, est au début égal à $L1 (2,5)$, passe par 1 pour $t=T=77$ et tend vers $sinf \cdot L1 = 2,5 \cdot 0,11=0,275$. Quand $nc < 1$, l'épidémie est en décroissance.

Si $nc(0)=L1 < 1$ il n'y a pas d'épidémie : c'est un cas isolé.

rinf=0,89 indique que, à la fin de l'épidémie, 89 pour cent de la population a été contaminée. Ce taux de 89 pour cent est le taux d'immunité collective qui assure le non redémarrage de l'épidémie.

Ex2 : 's i r nc' =. 200 SIR 6.7e7 0.4 0.16 0.15 0 0



Re =. Constantes_SIR 6.7e7 0.4 0.16 0.15 0 0
 'B1 G1 L1 s0 i0 r0 T sT iT rT sinf rinf' =. Re

L1, T, iT, sinf, rinf

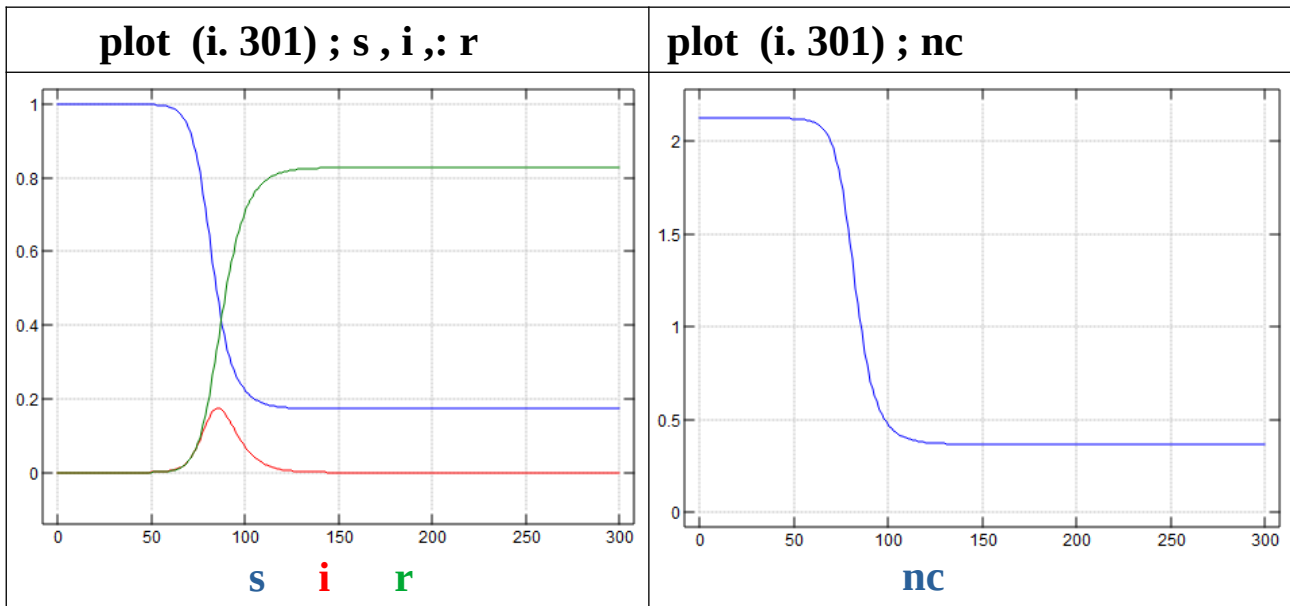
1.80625 136.23 0.11903 0.26522 0.73478

Dans cet exemple 2 on retrouve les mêmes données que dans l'exemple 1 mais on utilise un coefficient de confinement de la population **C1=0,15**.

On constate la division par 2 du pic épidémique (**iT passe de 0,23 à 0,11**) et son éloignement dans le temps (**T passe de 77 à 136 jours**). Cela permet aux autorités sanitaires de se préparer à ce pic.

Autres remarques : le taux d'immunité collective passe de 89/100 à 73/100. Le nombre moyen de transmission de la maladie par 1 infecté **nc** varie de L1=1,80 à L1.sinf =1,80. 0,27=0,5

Ex3 : 's i r nc' =. 300 SIR 6.7e7 0.4 0.16 0 0 0.15



Re =. Constantes_SIR 6.7e7 0.4 0.16 0 0 0.15

'B1 G1 L1 s0 i0 r0 T sT iT rT sinf rinf' =. Re

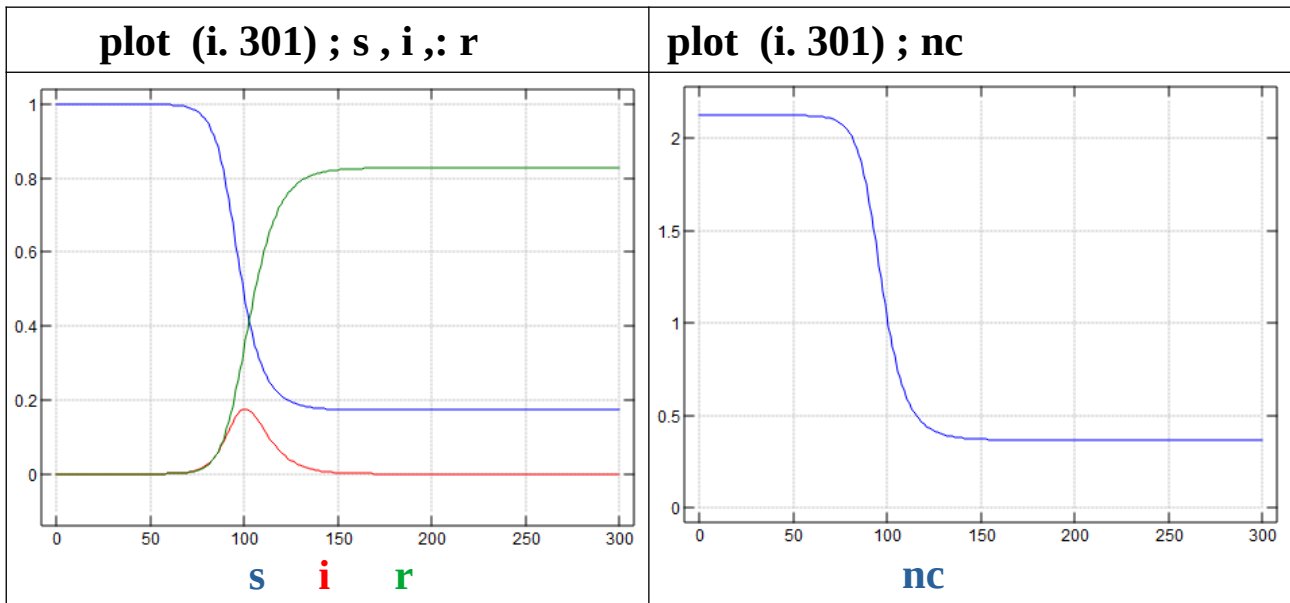
L1, T, iT, sinf, rinf

2.125 85.2202 0.174696 0.172206 0.827794

Dans cet exemple, les paramètres sont ceux de l'exemple 1 mais un médicament réduit la durée moyenne d'infection dans la proportion **c3=0,15**.

Le pic qui se situait à **T=77 jours** recule à **T=85 jours** ; sa valeur qui était de **0,23** descend à **0,17**. Le seuil d'immunité collective, qui était à **0,89** descend un peu à **0,83**.

Ex4 : 's i r nc' =. 300 SIR 6.7e7 0.4 0.16 0 0.15 0



Re =. Constantes_SIR 6.7e7 0.4 0.16 0 0.15 0

'B1 G1 L1 s0 i0 r0 T sT iT rT sinf rinf' =. Re

L1 , T , iT , sinf , rinf

2.125 100.259 0.174696 0.172206 0.827794

On peut constater que l'utilisation de paramètre **C1,C2,C3** différents de 0 entraîne une diminution du pic **iT** et un recul dans le temps de celui-ci.

On est donc amené à programmer l'algorithme « **S I R** » sur plusieurs périodes successives avec diverses valeurs des paramètres **C1,C2,C3**. Les valeurs initiales des variables sur une période sont les valeurs finales des variables sur la période précédente.

C) Utilisation du système d'équations (b) pour une simulation multi-périodes avec diverses valeurs des paramètres C1,C2,C3.

On utilise le pro-adverbe « MULTI_SIR » (voir annexe B2).

Utilisation (pour NP périodes):

Res =. (S0,I0,R0) NJ MULTI_SIR Par
ou. **Res =. NJ MULTI_SIR Par**
(par défaut : **S0=N-1 ; I0=1 ; R0=0**)
's i r nc' =. Res

Avec :

NJ : nombre de jours de simulation de chaque période
(vecteur de **NP** composantes) **nj =. 1++/NJ**

N : population

(S0 , I0 , R0) : valeurs initiales (1^e période) des variables

Par =. N ; B ; G ; C1 ; C2 ; C3 (vecteur de 6 boîtes)

(chaque boîte contient 1 nombre ou un vecteur de NP nombres)

En sortie 4 vecteurs de **nj** composantes :

s : proportion de « susceptibles sains»

i : proportion d'« infectés »

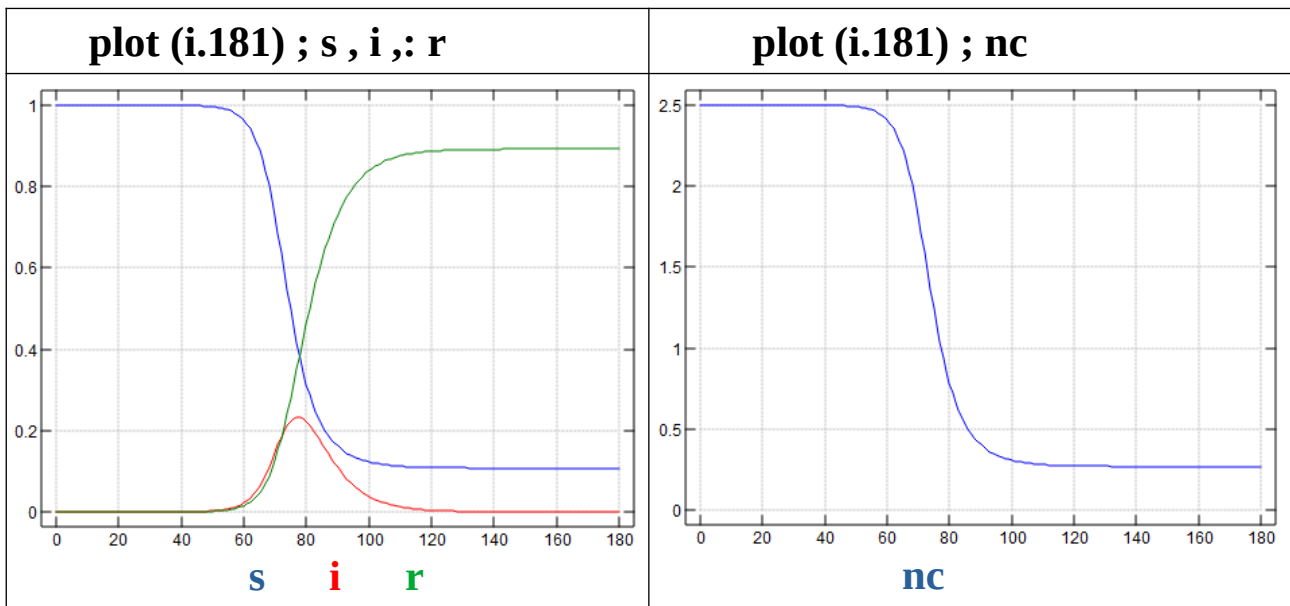
r : proportion de « rétablis immunisés et non contagieux»

nc : nombre de contaminés par 1 seul infecté

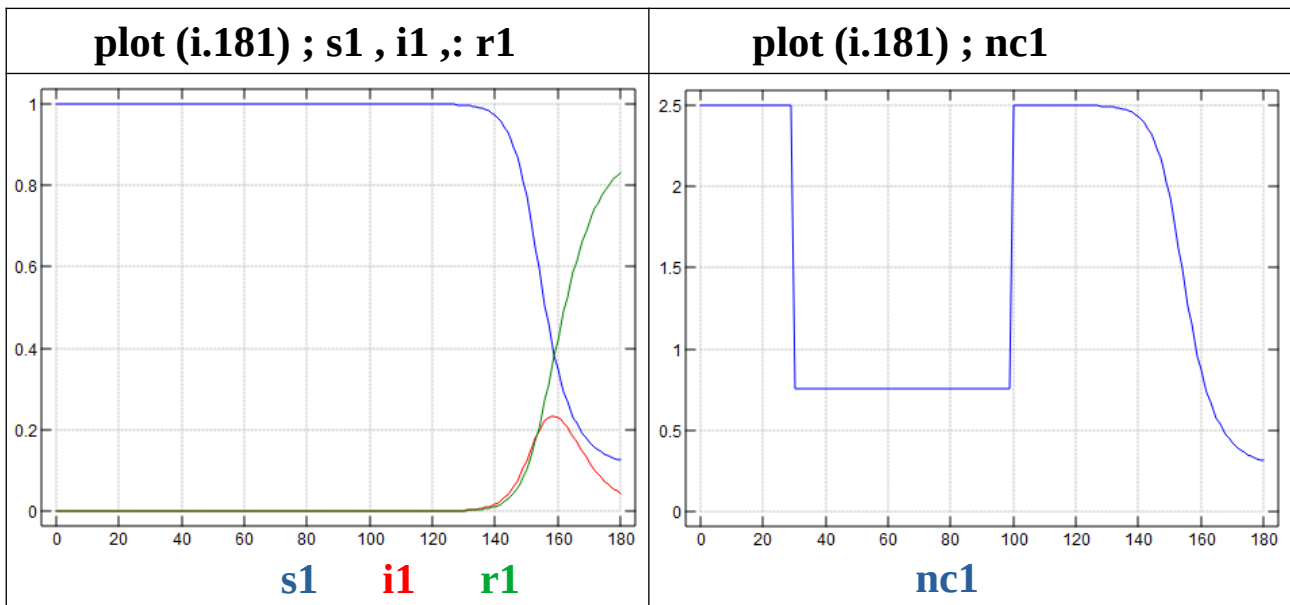
Res : matrice de 4 lignes et **nj** colonnes

Dans chaque période (autre que la 1^e) les valeurs initiales sont les valeurs terminales de la période précédente, ce qui implique la continuité des courbes.

Ex5 : 's i r nc' =. 180 SIR 6.7e7 0.4 0.16 0 0 0



's1 i1 r1 nc1'=. (30 70 50) MULTI_SIR 6.7e7; 0.4; 0.16; 0 0.45 0; 0; 0



Dans cet exemple déduit de l'exemple 1 sur 180 jours en ajoutant un confinement de 0.45 dans la 2^e période de 70 jours, on constate que l'effet de ce confinement ne permet que de « gagner » (sic) du temps, la valeur du pic iT étant sensiblement conservée, T passant de 80 à 160 environ. **Un confinement ne permet pas d'estomper l'épidémie mais seulement de retarder l'échéance.** Cela est néanmoins intéressant pour organiser la réponse médicale, attendre un vaccin, un médicament, ou une meilleure saison (en cas d'épidémie saisonnière).

**Un confinement ne change ni les valeurs maximales,
ni les valeurs limites pour t tendant vers l^∞ ,
il se contente de retarder l'échéance.**

Évidemment, il y a des approximations discutables dans le modèle « **SIR** ». Le nombre de nouveaux cas journaliers estimé à $\mathbf{B.I_k.S_k/N}$ suppose que la population est parfaitement homogène (mêmes risque, mode de vie, détermination dans la pratique des méthodes de protection, résistance au virus...) : on peut en douter ! On ne fait pas de graduation de gravité de la maladie : les cas asymptomatiques, bénins, hospitalisés, et nécessitant une réanimation sont tous mélangés et décomptés dans les infectés. Les individus décédés sont comptabilisés dans les rétablis (!!!!!) : il est vrai qu'ils ne sont plus contagieux....

Une vaccination n'est pas prévue : elle permettrait d'être immunisé sans passer par la case « infecté ». Le modèle « **SIR** » a l'inconvénient de ne prendre en compte ni une éventuelle vaccination, ni les décès, ni la charge hospitalière (en particulier la réanimation), ni la période d'incubation, ni la période « asymptomatique »....

On est donc amené à « complexifier » le modèle « **SIR** ». Il est prévu une 2^e étude qui n'ignore pas ces éventualités ... au prix, évidemment, d'une augmentation de la complexité !

ANNEXES

A) ANNEXES MATHÉMATIQUES

A1) Calcul des constantes

a) Calcul de sT , iT , rT (On utilise le système d'équations (c)) :

$$ds/dt = - B1.s(t).i(t) \quad (c1)$$

$$di/dt = B1.s(t).i(t) - G1.i(t) \quad (c2)$$

$$dr/dt = G1.i(t) \quad (c3)$$

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1 \quad (c4)$$

(c1,c3) $\rightarrow (1/s(t)). ds/dt = - B1. (1/G1).dr/dt = (- L1).dr/dt$ car $L1 = B1/G1$
 $d(\text{Log}(s(t))+L1.r(t))/dt = 0$ et en intégrant:

$$\text{Log}(s(t))+L1.r(t) = A = \text{cste} = \text{Log}(s0)+L1.r0 \quad t \in [0, \infty[\quad (c5)$$

(c2) \rightarrow pour $t = T$: $(ds/dt)_{t=T} = 0 = (B1.sT - G1).iT \rightarrow sT = 1/L1$

(c5) \rightarrow avec $t = T$: $rT = r0 + (1/L1). \text{Log}(L1.s0)$

(c4) $\rightarrow iT = 1 - sT - rT = 1 - r0 - (1/L1).(1+\text{Log}(L1.s0))$ d'où :

$$sT = 1/L1 \quad (c6)$$

$$iT = 1 - r0 - (1+\text{Log}(L1.s0))/L1 \quad (c7)$$

$$rT = r0 + \text{Log}(L1.s0)/L1 \quad (c8)$$

Le maxi de rT est $rT_{\max} = r0 + s0/e = r0 + 0,368.s0$ pour $L1 = e/s0 = 2,718/s0$

b) Calcul de sinf et rinf (limites quand t est « grand »)

(c5) \rightarrow pour $t \rightarrow \infty \rightarrow \text{Log}(\text{sinf}) + L1.\text{rinf} = A$

(c4) \rightarrow pour $t \rightarrow \infty \rightarrow \text{sinf} + \text{rinf} = 1$ (car $i_{\text{inf}} = 0$) d'où :

$$\text{Log}(\text{sinf}) + L1.(1 - \text{sinf}) = A$$

$$\text{Log}(\text{sinf}) - L1.\text{sinf} + a = 0 \quad \text{où } a = L1 - A = L1.(1 - r0) - \text{Log}(s0) \quad \text{donc :}$$

sinf est solution de l'équation transcendante : (c9)

$$\text{Log}(Y) - L1.Y + a = 0 \quad \text{avec } a = L1.(1 - r0) - \text{Log}(s0) \quad \text{et } 0 < Y < sT$$

$$\text{sinf} = Y \quad \text{et} \quad \text{rinf} = 1 - Y$$

Y se calcule par la méthode itérative de Newton :

$$f(Y) = \text{Log}(Y) - L1.Y + a \rightarrow f'(Y) = (1/Y) - L1 \rightarrow F(Y) = Y - f(Y)/f'(Y)$$

$$F(Y) = Y . (b - \text{Log}(Y))/(1 - L1.Y) \quad \text{où } b = 1 + \text{Log}(s0) - L1.(1 - r0)$$

On choisit une approximation $Y0$ et on calcule la suite de nombres :

$$Y1 = F(Y0), Y2 = F(Y1), Y3 = F(Y2), \dots, Y_{n+1} = F(Y_n).$$

Cette suite (Y_n) tend vers Y quand n est « suffisamment » grand.

c) Calcul de T

(c5) → pour $t_1=t$ & $t_2=0$ → $r(t) = r_0 - \text{Log}(s(t)/s_0)/L1$ $s(t)=s$

(c4) → $i(t) = 1 - r_0 - s + sT \cdot \text{Log}(s/s_0)$ $sT=1/L1$

(c1) → $ds/dt = -B1.s \cdot i(t)$

$$ds/dt = -B1.s \cdot (1 - r_0 - s + sT \cdot \text{Log}(s/s_0))$$

d'où : $dt = -ds / [B1.s \cdot (1 - r_0 - s + sT \cdot \text{Log}(s/s_0))]$

On intègre entre 0 et T :

$$T = \int_0^T dt = \int_{s_0}^{sT} \left(\frac{-ds}{B1.s \cdot ((1-r_0) - s + sT \cdot \ln(s/s_0))} \right) \quad \text{on pose } y=s_0-s, \quad ds = -dy$$

$$T = \left(\frac{1}{B1} \right) \cdot \int_0^{s_0-sT} \left(\frac{dy}{(s_0-y) \cdot (1-r_0-s_0+y+sT \cdot \ln(1-\frac{y}{s_0}))} \right) = \left(\frac{1}{B1} \right) \cdot \int_0^{s_0-sT} f(y) \cdot dy \quad i_0=1-s_0-r_0$$

$f(y) = 1 / ((s_0-y) \cdot (i_0+y+sT \cdot \text{Log}(1-y/s_0)))$ d'où au voisinage de $y=0$:

$$f(y) \approx 1 / ((s_0-y) \cdot (i_0+y+sT \cdot (-y/s_0 - y^2/2s_0^2 \dots))) \approx 1 / ((s_0 \cdot i_0) + y \cdot (s_0 - i_0 - sT) + y^2 \dots)$$

$f(y) \approx 1 / (a+b \cdot y)$ avec $a=s_0 \cdot i_0$ et $b=s_0 - i_0 - sT$ au voisinage de $y=0$ donc :

$$f(y) = 1 / (a+b \cdot y) + [1 / ((s_0-y) \cdot (i_0+y+sT \cdot \text{Log}(1-y/s_0))) - 1 / (a+b \cdot y)]$$

$f(y) = 1 / (a+b \cdot y) - g(y)$ avec :

$$g(y) = [1 / ((s_0-y) \cdot (i_0+y+sT \cdot \text{Log}(1-y/s_0))) - 1 / (a+b \cdot y)]$$

$g(y) = - \text{Num}(y) / \text{Den}(y)$ où :

$\text{Den}(y) = (a+b \cdot y) \cdot (s_0-y) \cdot (i_0+y+sT \cdot \text{Log}(1-y/s_0))$

$\text{Num}(y) = (s_0-y) \cdot (i_0+y+sT \cdot \text{Log}(1-y/s_0)) - (a+b \cdot y)$ on effectue et simplifie :

$$\text{Num}(y) = [(s_0 \cdot i_0) - i_0 \cdot y + s_0 \cdot y - y^2 + sT \cdot (s_0-y) \cdot \text{Log}(1-y/s_0)] - [s_0 \cdot i_0 + (s_0 \cdot i_0 - sT) \cdot y]$$

il reste : **$\text{Num}(y) = sT \cdot y + y^2 + sT(s_0-y) \cdot \text{Log}(1-y/s_0)$**

On peut calculer :

$$\int_0^{s_0-sT} \left(\frac{dy}{a+b \cdot y} \right) = \frac{1}{b} \cdot \ln \left(\frac{a+b \cdot (s_0-sT)}{a} \right) = \frac{1}{b} \cdot \ln \left(1 + \frac{b}{a} \cdot (s_0-sT) \right)$$

On obtient finalement :

$$T = \frac{1}{B1 \cdot b} \cdot \ln \left(1 + \frac{b}{a} \cdot (s_0-sT) \right) - \frac{1}{B1} \cdot \int_0^{s_0-sT} \left(\frac{\text{Num}(y)}{\text{Den}(y)} \right) \cdot dy \quad a=s_0 \cdot i_0 \quad b=s_0 - i_0 - sT$$

$$\text{Num}(y) = sT \cdot y + y^2 + sT \cdot (s_0 - y) \cdot \text{Log}(1 - y/s_0) \quad \text{(c10)}$$

$$\text{Den}(y) = (a + b \cdot y) \cdot (s_0 - y) \cdot (i_0 + y + sT \cdot \text{Log}(1 - y/s_0))$$

Ces résultats sont programmés dans l'annexe informatique **B1**. On y trouvera l'espace de travail « **EPIDEMIE-CONSTANTES-SIR.ijs** »

A2) Forme matricielle du système d'équations (c)

Le système d'équations (c) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$ds/dt = -B1.s(t).i(t) \quad (c1)$$

$$di/dt = B1.s(t).i(t) - G1.i(t) \quad (c2) \quad ; \quad d\mathbf{V}(t)/dt = \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}(t) \quad \text{avec :}$$

$$dr/dt = G1.i(t) \quad (c3)$$

$$\mathbf{V}(t) = \begin{vmatrix} s(t) \\ i(t) \\ r(t) \end{vmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -B1 \\ 0 & -G1 & 0 & B1 \\ 0 & G1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{W}(t) = \begin{vmatrix} s(t) \\ i(t) \\ r(t) \\ s(t).i(t) \end{vmatrix}$$

Itérations :

Ordre 1 :

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k-1} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_{k-1}$$

Ordre 2 :

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k-2} + 2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_{k-1}$$

Ces calculs sont programmés (voir annexe informatique **B2**). On y trouvera l'espace de travail « **EPIDEMIE-SIR.ijs** » contenant 2 pro-adverbes : « **SIR** » et « **MULTI_SIR** ».

B) ANNEXES INFORMATIQUES

B1) Calcul des constantes du modèle SIR

On utilise les résultats de l'annexe mathématique A1.

EPIDEMIE-CONSTANTES-SIR.ijs

require 'c:/users/nom_utilisateur/j903-user/boitaoutils'

require 'c:/users/nom_utilisateur/j903-user/moyennes et integrations'

require 'plot'

Constantes_SIR =: {}v

((N-1),1 0) Constantes_SIR y ['N B G C1 C2 C3'=.y

:

's0 i0 r0' =. x%N ['N B G C1 C2 C3'=.y

sT =. %L1=.B1% G1=.G%(1-C3) [B1=.B*(*:1-C1)*(1-C2)

iT =. 1-sT+rT =. r0+sT*(^s0%sT)

rinf =. 1-sinf =. x sINFINI y [T =. x CalcT y

B1,G1,L1,s0,i0,r0,T,sT,iT,rT,sinf,rinf

}}

NB. Utilisation :

NB. Res =. (S0,I0,R0) Constantes_SIR N,B,G,C1,C2,C3

NB. Res =. Constantes_SIR N,B,G,C1,C2,C3

NB. (par défaut : S0=N-1 ; I0=1 ; R0=0)

NB. 's0 i0 r0 T sT iT rT sinf rinf B1 G1 L1' =. Res

sINFINI =: {}v NB. Calcul de s(infini)=sinf

((N-1),1 0) sINFINI y ['N B G C1 C2 C3'=.y

:

's0 i0 r0'=.x%N ['N B G C1 C2 C3'=.y

b =. 1+(^s0)-(-.r0)*L1 =. (B%G)/-C1,C1,C2,C3**

Ff =. (L1,b)&{{y*((1{x}-^y)%-.y*0{x}}

(Ff^:30)0.001

}}

NB. Utilisation:

NB. sinf =. (S0,I0,R0) sINFINI N,B,G,C1,C2,C3

NB. sinf =. sINFINI N,B,G,C1,C2,C3

NB. (par défaut : S0=N-1 ; I0=1 ; R0=0)

```
CalcT =:{{}}v NB. Calcul de T
((N-1),1 0) CalcT y [ 'N B G C1 C2 C3' =. y
:
'ss0 ii0 rr0'=:x%N [ 'N B G C1 C2 C3' =. y
ssT =: G%(1-C3)*B1 =. B*(*:1-C1)*(1-C2)
aa =: ss0*ii0 [ bb =: ss0-ssT+ii0
Num =:{{(-*:y)+ssT*y+(ss0-y)*^.1-y%ss0}}"0
Den =:{{(aa+bb*y)*(ss0-y)*ii0+y+ssT*^.1-y%ss0}}"0
Ff =:{{(Num y)%Den y}}"0
T1 =. (^1+bb*(ss0-ssT)%aa)%B1*bb
T2 =. (%B1)*90 (Ff INCC 7) 0,ss0-ssT
z =. EFFACE ;: 'ss0 ii0 rr0 ssT aa bb Num Den Ff'
T1-T2
}}
```

NB. Utilisation:

NB. T =. (S0,I0,R0) CalcT N,B,G,C1,C2,C3

NB. T =. CalcT N,B,G,C1,C2,C3

NB. (par défaut : S0=N-1 ; I0=1 ; R0=0)

B2) Modèle SIR : simulation numérique

(on utilise les résultats de l'annexe mathématique A2)

EPIDEMIE-SIR.ijs

```
require 'c:/users/nom_utilisateur/j903-user/boitaoutils.ijs'
```

```
require 'plot'
```

```
SIR =:{{}}a
```

```
((N-1),1 0) m SIR y [ 'N B G C1 C2 C3' =.y
```

```
:
```

```
Y1=.Res=.x%N [ 'N B G C1 C2 C3' =.y
```

```
B1=.B*(*:1-C1)*(1-C2) [ G1=.G%(1-C3) [ K=.i._1+NJ=.m
```

```
M=.3 4$0 0 0,(-B1),0,(-G1),0,B1,0,G1,0 0
```

```
Y2=.Z [ Res=.Res,.Y1=.|Y1+ M(+/.*)Y1,*/0 1{Z=.Y1
```

```
for_k. K do.Y2=.Z [ Res=.Res,.Y1=.|Y2+2*M(+/.*)Y1,*/0 1{Z=.Y1
```

```
end.
```

```
Res,(0{Res)*B*(*:1-C1)*(1-C2)*(1-C3)%G
```

```
}}
```

NB. Utilisation :

NB. Res =. NJ SIR N,B,G,C1,C2,C3

NB. Res =. (S0,I0,R0) NJ SIR N,B,G,C1,C2,C3

NB. 's i r nc' =. Res

NB. SIR avec divers paramètres sur plusieurs périodes

```
MULTI_SIR =: {}a  
((N-1),1 0) m MULTI_SIR y [ N =. {.>{.y  
:  
if. 1=*/((#&>)y)e.1,NP =. #m do. PAR =. |:>NP$&.>y  
else. E 'ERREUR de longueur' return. end.  
K =. i.NP [ condinit = .x [ N =. {.{.PAR  
Res =. .,x%N [ nc =. 0  
for_k. K do. NJ =. k{m  
Res =. (}: "1 Res),. } : Y =. |condinit NJ SIR par=.k{PAR  
condinit=(.}: {"1 Y)*0{par  
nc =. (}:nc),(0{Y)*(%/1 2{par)*(*:-.3{par)*(*/- .4 5{par) end.  
Res =. Res , nc  
}}
```

NB. Utilisation (pour NP périodes) :

NB. Par =. N ; B ; G ; C1 ; C2 ; C3

NB. (vecteur de 6 boîtes, contenant chacune 1 entier

NB. ou un vecteur de NP entiers)

NB. Res =. (S0,I0,R0) NJ MULTI_SIR Par

NB. Res =. NJ MULTI_SIR Par

NB. (par défaut : S0=N-1 ; I0=1 ; R0=0)

NB. NJ : vecteur de NP nombres (nombres de jours des NP périodes)

NB. 's i r nc' =. Res