La non-linéarité, mythe ou réalité ?
par Gérard A. Langlet

La non-linéarité est une propriété que l'on attribue à la plupart des systèmes physiques "réalistes" étudiés de nos jours - par le truchement des équations qui sont censées les décrire; mais se pourrait-il que cette non-linéarité ne soit, en fin de compte, qu'une illusion, due à un manque d'approfondissement mathématique et à un choix non optimal des paramètres de description ?

Un moyen efficace, et mathématiquement rigoureux, d'abolir la non-linéarité définitivement, consiste à tenter la description de tous les systèmes physiques possibles, directement en algèbre entière modulo 2 : une telle démarche s'éloigne radicalement des habitudes acquises par les physiciens, d'abord au cours de leur cursus scolaire et universitaire, puis tout au long de leur vie professionnelle; pourtant, quelques minutes de réflexion sur le simple fait que ladite algèbre entière modulo 2 (celle de Z/2Z pour les mathématiciens) est isomorphe de la logique binaire avec laquelle fonctionnent TOUS les ordinateurs, outils de moins en moins incontournables pour les mêmes physiciens, n'apparaîtraient pas comme un luxe, après trois siècles de développement de cette fameuse non-linéarité, bien ennuyeuse lorsqu'il s'agit d'intégrer des systèmes d'équations... non intégrables.

Sans approfondir ici cette possibilité qui n'est pas restée une vue de l'esprit (le Laboratoire d'Informatique Théorique en a étudié, depuis plusieurs années, les aspects mathématiques et algorithmiques, et travaille dans cette algèbre systématiquement depuis 1989 (voir la Note °)), on peut aussi montrer, sur des exemples bien choisis, pourquoi et comment la non-linéarité est susceptible de disparaître lorsqu'on prend le soin et le temps de renormaliser - par des voies alors très classiques - les problèmes initialement posés.

Un exemple sera proposé ici à la curiosité mathématique du lecteur; il s'agit de la fameuse équation de Verhulst, connue et utilisée depuis plus de 130 ans, rebaptisée "logistic map" par les auteurs anglo-saxons, notamment May. Cette équation, forgée de toutes pièces, à l'époque, pour "coller" avec les relevés expérimentaux sur l'équilibre des populations, se retrouve appliquée partout, en physique dure comme en médecine, car, relativement simple, elle possède des propriétés extraordinaires, à tel point qu'il paraît dans le monde au moins un livre par mois y consacrant quelques pages (notamment tous les ouvrages traitant plus ou moins de phénomènes dits "chaotiques").

Cette équation a pour formulation : $X_{n+1} = 4 X_n (1 - X_n)$ (1)
dans laquelle X est une variable variant entre 0 et 1 bornes incluses.

En partant d'une valeur X_o quelconque de la variable dans cet intervalle, on itère de manière à obtenir la suite x_1, X_2, ... X_n, X_{n+1}, etc... Par exemple pour une population, ou une densité de population. L'équation, parabolique, est, par définition, non linéaire. Le facteur d'échelle 4 a pour but de ramener à 1 la valeur maximale de X_{n+1} de sorte que le résultat varie dans le même intervalle que la variable.

En cinétique chimique, avec les réactions du deuxième ordre, on pose une équation du même type, mais différentielle, en supposant que la vitesse d'apparition dX/dt d'une espèce chimique X est proportionnelle à la concentration [X] de cette même espèce, et aussi à la concentration [Y] d'une autre espèce Y supposée disparaître dans la même proportion que X apparaît, de sorte que l'on remplace [Y] par [1-X] en prenant [1] comme unité de concentration (somme de la concentration des deux espèces), le terme même d'espèce, utilisé couramment aussi bien en chimie qu'en zoologie et en gestion financière, aide alors à comprendre pourquoi ce type d'équation va se retrouver utilisé dans la modélisation de la dynamique de fort nombreux systèmes.

Le célèbre Jeu de la Vie (de Conway, 1970), l'automate cellulaire probablement le plus connu et le plus étudié, car il semble simuler l'évolution d'une population bactérienne observée au microscope, applique, lui, des règles discrètes : un individu avec trop peu de voisins disparaît, esseulé et, surtout, sans capacité de se reproduire; un individu, entouré par trop de voisins, meurt, étouffé. Par rapport aux fonctions continues, les règles discrètes ont le mérite évident d'induire moins de postulats : en effet, aussi bien en chimie qu'en écologie ou en monétique, TOUTES les espèces en question correspondent à des individus discernables les uns des autres et non pas à un continuum.

Avec du continu, on peut forger a priori autant de règles "ad hoc" que l'on veut, pour décrire n'importe quel phénomène d'une quasi infinité de façons (les exemples abondent... de sommes d'exponentielles présentées comme des "lois de la nature" alors qu'elles représentent seulement des résultantes moyennes d'interactions discrètes, mal comprises sinon pas du tout, dans leur élémentarité).

Essayons de renormaliser, en compliquant apparemment pour mieux simplifier ensuite, et, surtout, pour mieux comprendre la périodicité des systèmes que cette équation logistique ad hoc a pour but décrire :

Posons $y=\arcsin\sqrt{x}$ et récrivons l'équation (1) avec $\sqrt{x}=\sin y$; le terme (1 -X) est alors tel que sa racine carrée devient le cosinus du même angle. On va maintenant considérer l'équation logistique non plus comme une formule faisant varier une variable X, arbitrairement entre 0 et 1, mais comme faisant varier directement une PHASE dans un système dynamique.

La variation entre 0 et 1 avait été choisie parce que l'on compte une population à l'aide de nombres a priori non négatifs; mais il ne faudrait pas oublier qu'un comptage de population fournit seulement une information très partielle sur celle-ci (voir les interprétations abusivement "moyennées" de certains sondages).

De la même manière, une mesure d'intensité en spectroscopie ne renseigne pas sur la phase (ne pas oublier non plus la décomposition de 2Ψ en $\Psi\Psi^*$ dans l'équation de Schrödinger, à la base de la mécanique quantique, c'est pourquoi, dans des étapes ultérieures du raisonnement, on considérera aussi $\arcsin(-\sqrt{x})$ donc des valeurs négatives pour y).

La formule magique se réduit alors, comme par enchantement, à:
$Y_{n+1} = 2Y_n$ modulo 2π bien sûr, et c'est tout... donc à un doublement d'angle.

(Même avec un coefficient supplémentaire variable, souvent symbolisé par μ, cette renormalisation reste applicable).

On voit a) disparaître effectivement la non-linéarité;
b) apparaître une algèbre modulo quelque chose.

On peut, par isomorphisme et auto-similarité, étudier cette application dans de nombreuses algèbres modulo qqch, dont l'algèbre entière modulo 2, donc également en binaire pur (sans aucun risque de perte de précision donc sans altération de l'information, ce qui s'avère rigoureusement impossible autrement).

(En approfondissant, on peut se relier aux corps de Galois, et aboutir à de nouveaux résultats sans effectuer AUCUN calcul... au sens traditionnel du terme).

Mais le plus intéressant dans cette affaire reste encore à démontrer et vient de l'étude du "point fixe" : ce dernier est la valeur de X telle que Xn+l reste égal à Xn (population constante, état "stationnaire", "équilibre dynamique"), qui correspond à un certain idéal, aussi bien écologique que financier (maintien constant du taux de population, surtout si les ressources n'augmentent pas, maintien constant du taux de chômage ou de la parité du Franc, à défaut de possibilité d'améliorer la situation), et THERMODYNAMIQUE, (état pour lequel la LOI d'évolution doit suivre ce qu'Onsager appelle la micro-réversibilité - donc, nécessairement, une loi linéaire un peu... spéciale).

Cette valeur de X vaut 3/4 dont la racine est le sinus de 60° ou de 120°, comme chacun sait.

Alors les choses deviennent claires, beaucoup plus claires que dans l'intervalle {0,1}, car le doublement de ce point fixe vu comme un argument, un angle de phase dans le plan complexe, avec une valeur négative possible pour le sinus, fournit un angle de 240° lequel, doublé, donne 480°, équivalent de 120°, modulo 360° bien entendu.

Cette dernière phrase constitue à elle seule (car il n'existe pas d'autre solution), une preuve que la loi idéale d'évolution des systèmes va correspondre à une succession de rotations - discrètes - de phase, d'un tiers de tour. On se garde d'utiliser les 2/3 du nombre π pour exprimer cette propriété fondamentale, car π, nombre transcendant incorrigible, n'a aucune utilité dans cette affaire:

Tout adjudant, même borné inférieurement, comprend et enseigne le demi-tour à gauche, gauche! mais tout bon officier sorti des Écoles et de la cuisse de Jupiter,
borné supérieurement, ne jure, en dialecte hexagonal, que par des rotations de n dans le sens trigo, pour signifier banalement la même chose.

Or, la constante complexe j est beaucoup plus importante, pour toute la physique,
que π; en effet, il ne peut exister d'espace tridimensionnel (comme le nôtre, paraît-il, isotrope quoique fractal), sans elle. j est l'opérateur de symétrie primordial de cet espace, celui de la rotation autour de la diagonale du cube (laquelle est aussi l'axe du temps du "cône" chapeau de clown de l'espace-temps), noté simplement 3 par les cristallographes; cette rotation fait passer d'une face à la suivante; l'opérateur inverse est alors simplement -j qui a, dans le plan complexe, un argument double de celui de j, (mais qui est aussi j2, le carré de j et aussi son complexe conjugué et son inverse 1/j). *Et* j possède une représentation exacte dans un ordinateur, non pas celle que l'on penserait à utiliser lorsqu'on s'accroche à l'algèbre prétendument complexe telle que l'offre - de manière obsolète et trompeuse - un langage de programmation comme FORTRAN (consommant inutilement 128 bits de mémoire en double précision), mais celle d'un opérateur matriciel de rotation de 120°, alors expressible, sans aucune erreur, à l'aide de 4 bits de mémoire (et pas un de plus) en algèbre entière modulo 2 (et très facilement utilisable lorsqu'on connaît la notation dite d'Iverson). En effet, la matrice :

1 1	a **pour** carré matriciel et **pour inverse** matriciel		0 1
1 0	(modulo 2)	(modulo 2)	1 1

soit son simple retournement par rapport à la seconde diagonale : en algèbre entière modulo 2 (dans laquelle on peut TOUT exprimer), le "calcul" traditionnel se ramène toujours à des combinaisons fort simples de symétries, qu'il s'agisse d'opérations matricielles ou de transformations orthogonales : depuis l'avènement de l'informatique (déjà un demi-siècle), on s'obstine à faire exécuter à l'ordinateur ce pourquoi il n'est PAS doué : des transformations basées sur les propriétés des tables de logarithmes et des règles à calcul; on a négligé d'étudier de plus près les propriétés par BLOCS (et dans certaines topologies inhabituelles) des ensembles de données ne contenant que 0 OU 1 . Ces propriétés ouvrent une toute nouvelle branche des mathématiques et vont, peu à peu, transformer bien des habitudes, en informatique comme en physique, en apportant, massivement, des simplifications que l'on espérait depuis longtemps (et que l'on ne pourrait trouver autrement, avec un degré de cohérence, qui étonne encore au fur et à mesure que l'on progresse dans cette recherche passionnante qui met en jeu **symétries** et **parités ...).**

Cette matrice est doublement fibonaccienne : il suffit de regarder ce que contiennent ses puissances successives non modulo 2 pour s'en apercevoir.

Cette matrice est fractale: il suffit de considérer modulo 2 les coefficients du développement de a+b en puissances successives en plaçant ces derniers en colonne depuis la droite vers la gauche et l'on trouve, immédiatement un des quatre retournements possibles du triangle de Sierpinski, dont deux sont, pour TOUT rang jusqu'à l'infini, des représentations exactes de j et j2.

Qui veut essayer ? Ces propriétés ne constituent qu'un échantillon...