

Le Principe de Moindre Action Généralisée (MAG)

par Gérard A. Langlet

EN HOMMAGE A MAUPERTUIS

ou

Les Fanions du Port de Saint Malo

"La Nature est économe dans toutes ses Actions."

Maupertuis (1744).

"Une idée esthétique préconçue a dû certainement conduire Maupertuis à sa moindre action qui a aujourd'hui une si grande fortune."

Paul Valéry, Cahiers, La Pléiade, Paris (1974), T. II, p.865.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis, géomètre et philosophe français, est né à Saint Malo en 1698. Il est l'auteur du célèbre principe de Moindre Action qu'il présentait comme la Loi de la Nature...

On n'a jamais, depuis cette époque, reformulé ce principe d'une manière telle qu'il puisse s'appliquer efficacement à tous les domaines de la connaissance humaine, dans toute sa simplicité.

En effet, pour rester sur le plan de la physique pure, la transdisciplinarité, vu l'éventail de domaines et sous-domaines actuellement couverts (et même recouverts) de milliers d'équations, résultant de théories parfois contradictoires, implique un parcours difficile. Une question simple se pose toutefois ces équations respectent-elles en totalité ledit principe et, sinon, pourquoi?

Valéry, ami de Louis de Broglie, s'intéressait à tout, à l'idée et à la forme. La notion d'idée esthétique préconçue est elle-même une idée esthétique préconçue... Peut-être sans s'en douter, Valéry, également grand admirateur de Léonard de Vinci, apporte-t-il, par son hypothèse dont nous découvrons la *récurtivité*, un élément de la solution.

Il n'a jamais existé de modèle mathématique complet du principe de Moindre Action; dans le cas contraire, ce modèle, à lui seul, constituerait l'expression même de la loi de la Nature. Pourtant, de très grands noms sont attachés à la Moindre Action : Gottfried Wilhelm Leibniz, sir Rowan Hamilton, Herman von Helmholtz et Ernst Mach, entre autres.

Que s'est-il donc passé? Pourquoi ces lois, pléthoriques, ne s'appliquent qu'à leur domaine, restreint? Qui oserait appliquer la gravitation, dite universelle, à la psychologie? Le poète et le philosophe ont ce droit, reconnu, parfois admiré. La réflexion de Valéry en dit autant que la phrase de Maupertuis; il n'y a pas de quoi s'étonner : à bien y regarder, la synonymie transparait... Maupertuis et Valéry sont deux roseaux pensants, et si Maupertuis a raison, son principe DOIT s'appliquer à l'esprit aussi bien qu'à la forme.

Colloque INSA, F-35000-Rennes, Actes : ISBN 2-909947-00-9

Prologue Idées en vrac (selon la créativité à l'américaine)

Moindre Action, Comportement, Dominance, Erosion et Fractalité

Le comportement de toute entité reconnue comme "vivante" consiste à se propager; cette propagation s'effectue aux dépens de l'environnement, c'est-à-dire d'autres espèces, d'autres communautés de la même espèce, et, parfois, d'autres individus.

Si, dans cette lutte incessante mais obligée, l'individu, qui tente de se propager ou d'agir, n'est pas "dominant", il ne pourra rien faire sinon se cacher. Au contraire, l'individu dominant aura tendance à rabaisser ses rivaux et aussi à protéger ses semblables qu'il ne juge pas comme dangereux pour le moment.

La notion de dominance est, à la fois, globale et partielle, ou, plus exactement fractale. Elle se retrouve à toutes les échelles d'organisation hiérarchique, matérielle ou immatérielle, donc aussi psychologique.

Le mot "vivante" a été mis entre guillemets car il n'existe, pour la dominance, aucune restriction : dans des conditions normales de pression atmosphérique, la vapeur d'eau se propage au détriment du liquide au-dessus de 100 degrés, l'inverse se produisant en dessous de cette frontière moyenne, grandeur macroscopique qui ne permet pas de raisonner strictement au niveau de l'individu concerné, la molécule d'eau qui se délie de ses voisines, ou, au contraire, se lie à elles, une par une.

Si un individu possède une opinion dominante (sur n'importe quel sujet), il fera basculer celle de son interlocuteur. Tout parti politique est un rassemblement d'individus possédant grosso modo la même opinion globale (ou le même intérêt occasionnel) lorsqu'il s'agit de faire basculer la majorité au pouvoir, ou, au contraire, de la conserver. Mais des différences, dites mineures - on parle de divergences existent toujours au niveau de parités subalternes; il se forme des sous-groupes en fonction de tendances. Le même comportement se retrouve dans toute association, toute secte, toute hiérarchie, librement acceptée ou imposée.

Sur le plan psychologique pur, le but "instantané" de chaque humain n'apparaît-il pas comme une tendance à rendre l'univers extérieur (plus ou moins proche) conforme à l'imaginé (univers intérieur)? Certains rêvent d'un monde meilleur, (le retour au jardin de l'Eden), mais le meilleur des mondes des dominants devient souvent l'enfer des récessifs (cf. Orwell, Huxley et Sartre). La Moindre Action fait aussi la Loi dans la Jungle.

Aucun système n'est jamais statique, même pas un simple caillou, lequel, en son intérieur, subit des transformations permanentes, à différents niveaux structuraux, telles qu'un jour, il se brisera ou se fondra. L'érosion affecte les continents autant que les idées, les modes et les théories, les marchés financiers et les individus. Erosion (ou vieillissement) est encore synonyme de Moindre Action; celle-ci est lente mais inexorable. Et il s'agit bien d'un processus fractal qui produit des formes visibles: montagnes, côtes de la Bretagne, océans, planètes et galaxies, ainsi que des pourritures et des poussières galactiques dont il "sortira" de nouvelles structures, belles et auto-organisées.

Tentative de Modélisation après retour aux sources

Un exercice consisterait à développer, sur des centaines de feuillets, les quelques idées émises en vrac dans la page précédente, puis à extraire du résultat les mots... dominants.

Notons-en quelques-uns, dans l'ordre alphabétique, comme "différence" "divergence" "dominant" (bien sûr) , "propagation" "récessif". Rajoutons-en quelques autres, lesquels n'apparaissent pas, mais qui sont manifestement sous-jacents, comme "forme", "évolution" (en fait synonyme du substantif "dynamique", mais aussi d'érosion", mot dans lequel on ne voit souvent que l'aspect négatif : l'érosion use, certes, mais crée des formes nouvelles; l'érosion du latin a produit un certain nombre de langues vivantes, dont la nôtre).

Essayons de modéliser logiquement, c'est-à-dire de la façon la plus simple qui soit, ces diverses observations et réflexions en une formule magique. Nous noterons au passage qu'il n'a jamais été question de nombres jusqu'à présent. Au niveau élémentaire de l'interaction, seul le problème majeur, celui qui, momentanément, domine les autres, a de l'importance; on résout les problèmes toujours les uns après les autres, et jamais simultanément : la rage de dents qui vous conduit chez le dentiste compte plus que la quête de la nourriture ou le bouclage de votre budget. L'urgence des problèmes tient en entier dans

l'expression, non numérique : "toutes affaires cessantes".

Soit un couple d'individus A et B (ou d'entités, avec le sens le plus large et vague possible). Le premier nombre transparaît : deux, mais ce sera aussi le seul. Aucune interaction n'est possible sans un couple, mais l'interaction simultanée de trois individus ou plus ne se produira JAMAIS : S'il existe un troisième individu C, il se trouvera toujours à "distance" inégale de A et de B. La notion de "distance égale" provient de la géométrie euclidienne, une idéalisation trop poussée...Il n'existe pas, dans la Nature, de triangle isocèle. L'âne de Buridan reste un mythe; la Nature n'a jamais connu de propositions indécidables: soit il ne se passe rien, du moins rien de perceptible à l'échelle de l'observateur, soit il se passe quelque chose. Le théorème de Gödel, manifestement, ne s'applique pas (nous y reviendrons dans d'autres articles).

Le principe de "moindre action" émis par Pierre Louis Moreau de Maupertuis, le célèbre géomètre et physicien de Saint-Malo (1698) qui emporta sa chaîne d'arpenteur jusqu'en Laponie (1737) pour vérifier que notre Terre n'était pas sphérique mais aplatie au pôle, et mesura cet aplatissement, s'exprimait simplement par la phrase, que nous appellerons la formulation (M) :

"La Nature est économe dans toutes ses actions".

Il s'agit là probablement du seul énoncé phrasal exact de la Loi de la Nature dans toute sa généralité. Maupertuis l'affirmait à juste raison, il y a déjà un quart de millénaire.

Hélas, l'introduction de grandeurs macroscopiques par les physiciens du XVIIe et du XVIIIe dénatura cette admirable phrase, a priori également valable en psychologie. Elle devint ce que l'on trouve encore de nos jours dans les encyclopédies, la formulation (H) :

"Le mouvement d'un point physique dans un champ de forces s'effectue de façon que l'action de ce point soit minimale."

Cette restriction à la mécanique et cette formulation euclidienne obligée introduisent des postulats pernicious dont Maupertuis s'était à juste titre passé initialement. Qu'est-ce qu'un point physique, qu'est-ce qu'un champ de forces? L'axiome de continuité s'est glissé insidieusement dans la phrase initiale, comme un virus latent.

Le retour aux sources s'avère indispensable pour progresser; à l'époque de Maupertuis, la seule grande loi de la physique était celle de Newton, celle de la Gravitation, déclarée "Universelle". Les équations de Maxwell ne sortirent qu'un siècle plus tard, comme l'algèbre de Boole et les idées de Hamilton. Dans les pays anglo-saxons (voir aussi bien les encyclopédies américaines qu'allemandes), la goélette Maupertuis a disparu corps et biens; il est alors question de "Hamilton Principle" ou de "Hamiltonsche Prinzip"; toutefois, quelques Anglais (comme Barrow) ont récemment retrouvé la mémoire, présentant peut-être que quelque chose ne colle pas dans la formulation (H).

La restriction à la mécanique (essentiellement céleste) tient bon. Mais on sait aujourd'hui que la loi de Newton n'est qu'une approximation, valable ni dans le domaine relativiste ni dans le domaine quantique; en outre, elle ne recouvre que l'attraction et non pas la répulsion, couple de parités pourtant absolument indissociables. Et il n'est pas question de l'appliquer à la génétique, où le "dominant" et le "récessif" font manifestement la loi, ni à la linguistique [on trouve des notions de classes et de formes d'objets (japonais, langues bantoues), des mutations (en corse et dans les langues celtiques dont le breton), des mots dominants (langue basque)].

Entre temps, de nouvelles théories et d'autres principes ont vu le jour, au début de ce siècle, par exemple la théorie des quanta (Planck), le principe d'exclusion (Pauli), le principe d'incertitude (Heisenberg) et la relation de de Broglie, unificateur génial du corpusculaire et de l'ondulatoire.

Toute tentative de reformulation ou de modélisation mathématique acceptable du principe original de Maupertuis - et non de son détournement - doit tenir compte de ces acquisitions nouvelles, et rester suffisamment générale pour ne plus ignorer complètement ni la biologie, ni la psychologie... A noter, dans ce dernier domaine, la Psychologie Différentielle (Stern, 1900) qui porte sur les différences individuelles et non plus sur le comportement global dans les aptitudes humaines, la Psychologie Sociale (Tarde, Moreno) relative à l'étude des petits groupes, et, justement, des interactions entre l'individu et ces groupes, essentiellement exprimées par l'envie et le mépris (couple d'oppositions de la rivalité).

Essayons d'unifier tout ceci... Vaste programme! Une gageure? Il apparaît alors une idée commune :

Essentiellement, la reformulation doit devenir quantique, sans entraîner de considérations probabilistes, d'abord beaucoup trop complexes, ensuite profondément axiomatiques, donc gödeliennes.

Ceci signifie, sur le plan strictement mathématique, que tout modèle candidat doit renoncer à la notion de différentielle sur des infiniment petits, au profit de différences finies; de toute manière, le modèle différentiel continu existe (H) à cause de difficultés mathématiques qui, hélas, apparaissent immédiatement (non-intégrabilité), il ne sera pas applicable dans un contexte généralisé. Mais, justement en vertu de cette généralisation espérée, la formulation (M), débarrassée de la jaquette euclidienne de (H) au profit d'un habit topologique, devrait s'appliquer quelle que soit l'algèbre utilisée. A l'ère de l'informatique, utilisons donc l'algèbre avec laquelle tous les ordinateurs fonctionnent sans exception, l'algèbre binaire. Le modèle sera alors, comme on peut l'espérer, vérifiable directement, à l'aide de programmes simplissimes.

Cette algèbre binaire remonte d'ailleurs aux racines mentales les plus profondes de l'homme, bien avant Boole (v. 1860), la logique des prédicats (Wittgenstein, 1920) et la logique trivalente (Lukasiewicz, 1921) ou trine (Lupasco), les Chinois avaient étudié et codifié des combinaisons deux à deux de 64 hexagrammes dans le Yi-king ou "Livre des Mutations" (justement), il y a 35 siècles. Ces traits continus et discontinus symbolisent les rapports complexes entre le yin (passif) et le yang (actif), les deux principes de base - complémentaires et opposés - modalités alternantes du fonctionnement universel (voir le tao et Lao-Tseu). Ils ne représentent pas autre chose que l'alternance du bras levé ou baissé (télégraphe Chappe, 1793), du "ti" court et du "ta" long (Morse, 1856), des trous ou absence de trous (les métiers à tisser de Jacquard, fin du XVIIIe, puis les cartes perforées, Hollerith, 1880), la présence ou l'absence de points (alphabet des aveugles, Braille, v. 1840). Les inventions efficaces sont toujours les plus simples; celles citées ici reposent toutes sur le même principe, et on pourra alors ajouter à la liste la photographie (couple négatif/positif, Niepce, 1830), son extension aux couleurs (complémentaires), le pressage de disques et l'imprimerie (creux/relief, avec retour à la Chine).

On remarquera que tous les programmes informatiques, toutes les données numériques et tous les textes entrés au clavier, sont toujours codés en binaire (selon différentes conventions, pas toujours optimales ni compatibles entre elles); on code aussi en suite de bits les messages envoyés dans l'espace intersidéral, à destination d'autres êtres intelligents hypothétiques, en espérant qu'ils sauront les décrypter.

L'enregistrement sur disque compact, maintenant "numérisé" (donc décomposable en une suite de bits) a permis d'atteindre des normes de haute fidélité sans aucune commune mesure avec les crachotements "analogiques" précédemment en usage. Des 41 symphonies de Mozart au génome humain, des photographies d'Uranus au cours de la Bourse, des mesures physiques aux états des électrons ou des neurones (fondamental ou excité), tout est codable, sans exception, sous forme de suites de bits.

Il est dommage que Leibniz, qui s'intéressa au binaire et eut communication des développements logiques des Chinois, (grâce au jésuite Grimaldi), n'ait pas conjugué le calcul différentiel et intégral qu'il inventa (1676) comme Newton, avec cette algèbre binaire. Nous aurions gagné plus de trois siècles. Malheureusement, l'obsession axiomatique du continu fut plus forte... Le nez de Cléopâtre ne s'anamorphosa pas assez.

Les Fanions décoratifs du port de Saint-Malo

Si la variation de tout phénomène peut s'exprimer en binaire, qu'est-ce donc qu'une différence finie dans cette même algèbre, avec laquelle le principe (M) sous sa forme originale doit nécessairement pouvoir s'exprimer sans restriction?

Soit une suite de bits extraite d'un signal quelconque,
par exemple S : 1 0 1 1 1 0 1 0

S	:	1 0 1 1 1 0 1 0	Cette disposition en Fanion
D1	:	1 1 0 0 1 1 1	présente les 7 différences
D2	:	0 1 0 1 0 0	finies successives binaires.
D3	:	1 1 1 1 0	si une séquence a N bits, il
D4	:	0 0 0 1	existe N-1 niveaux de diffé-
D5	:	0 0 1	rences finies successives.
D6	:	0 1	<i>Règle</i> On a 1 si les deux bits à
D7	:	1	gauche et à droite, au-dessus

de chaque case, différent l'un de l'autre, et 0 dans le cas contraire.

Si chaque ligne contient les différences finies de la ligne précédente, on peut dire que chaque ligne contient aussi l'intégrale binaire de la suivante.

La construction en Fanion, réalisable par toute personne ne possédant aucune culture mathématique, et même par un enfant, avec des "ronds" et des "bâtons" à la place des 0 et des 1, s'étend à une suite de bits quelconque, sans difficulté, et permet d'énoncer déjà la loi générale des Fanions

Toute suite finie de N bits est (N-1) fois successivement différentiable et, qui plus est, sans erreur ni approximation.

Or, toutes les lois de la physique, sans exception, ont été obtenues en posant d'abord des systèmes d'équations différentielles, puis en cherchant à intégrer ces systèmes pour obtenir dans chaque cas la formule applicable au phénomène étudié. Nous allons réitérer cette démarche, compte tenu du réconfort moral et mathématique apporté par la loi des Fanions.

L'opération d'intégration est la propagation d'une somme (en algèbre discrète, on symbolise cette opération par un sigma majuscule, et en théorie des fonctions, par le signe "intégrale").

Le Fanion ci-dessus constitue, pour tout signal (toute forme), que l'on peut toujours exprimer en binaire, l'équivalent d'un système différentiel habituel, mis à part le fait qu'il contient TOUTES les différences successives quantiques (on ne peut plus descendre à un niveau inférieur à celui de la différence entre deux bits) à quelqu'ordre que ce soit, donc sans aucune impasse ni postulat "simplificateur".

Naguère, lorsqu'on exprimait la variation d'un phénomène en fonction d'un paramètre quelconque x, par une fonction continue F(x), et que l'on cherchait cette fonction inconnue à partir de son système différentiel (on avait par exemple mesuré des vitesses et des accélérations, différences relatives de vitesses), on postulait qu'à partir d'un certain ordre (voir le développement en série de Taylor), les termes contenant les dérivées suivantes n'intervenaient pas.

Ici, une telle impasse n'est PLUS nécessaire. Cette décision restrictive a été historiquement imposée par le fait que l'on ne savait pas intégrer les systèmes différentiels posés au Nième ordre, dans le cas général; en outre, l'abandon postulé des ordres supérieurs, fait ipso facto perdre de vue une constatation d'importance :

Tout Fanion, s'il n'est pas tronqué, équivaut à un système linéaire d'équations différentielles à coefficients soit nuls, soit égaux à 1 (donc extrêmement simple).

Cela apparaîtra encore plus clairement par la suite... en transformant les Fanions en matrices, passant ainsi de la voile latine à la voile carrée... plus efficace pour le grand large.

Maintenant, tout signal, représentant la forme d'un univers entier, même infini, devient à la fois infiniment différentiable, et, comme on va le montrer, infiniment intégrable, toujours sans erreur (mais la Nature a-t-elle droit à l'erreur? Non, si Maupertuis a raison). Alors le Fanion se présentera "da solo" comme le modèle du principe de Moindre Action Généralisée.

La définition de Maupertuis, appliquée au calcul des "variations" (nom ancien du calcul intégral-différentiel) ou à la Méthode des Fluxions" (le calcul différentiel de Newton), implique nécessairement que les variations soient minimales à quelqu'ordre que ce soit, et non pas simplement à l'ordre 1 (vitesses) ou 2 (accélération) ou dans un mélange de ces deux ordres (par exemple pour optimiser un rayon de courbure).

Mais, avant de "revisiter" (comme disent les Anglo-Saxons) le calcul intégral, restreint à des 0 et des 1, regardons les Fanions de plus près, car ils le méritent : ce sont des triangles magiques.

Décalons vers la gauche et vers la droite les lignes du Fanion précédent de manière à obtenir les tableaux triangulaires alignés suivants, dans lesquels les lettres C et H vont désigner les alignements verticaux qui ont toujours le même nombre de bits que la séquence initiale S :

(la justification des notations C et H se trouve en appendice)

	H		C
S :	1 0 1 1 1 0 1 0		1 0 1 1 1 0 1 0
D1:	1 1 0 0 1 1 1		1 1 0 0 1 1 1
D2:	0 1 0 1 0 0		0 1 0 1 0 0
D3:	1 1 1 1 0		1 1 1 1 0
D4:	0 0 0 1		0 0 0 1
D5:	0 0 1		0 0 1
D6:	0 1		0 1
D7:	1		1

(Fanion droit ou tribord Fd)

(Fanion gauche ou bâbord Fg)

Prenons les séquences C et H ci-dessus, récrivons-les horizontalement, et formons le Fanion gauche de C et le Fanion droit de H :

C:	0 1 0 0 1	1 1 1	H:	1 1 0 1 0 0 0 1	On pourra constater
	1 1 0 1 0 0 0	0 1 1 1 0 0 1		1 0 0 1 0 1	que la première co-
	0 1 1 1 0 0				lonne verticale du
	1 0 0 1 0	1 0 1 1 1			Fanion gauche de C
	1 0 1 1	1 1 0 0			contient S à l'envers
	1 1 0	0 1 0			et que la dernière
	0 1	1 1			colonne verticale du
	1	0			Fanion droit de C
	↑	↑			contient H à l'envers
	S			C	

Pour éviter d'avoir à lire en diagonale, récrivons les Fanions sous la forme droite pour C et gauche pour H :

C: 0 1 0 0 1 1 1 1 H: 1 1 0 1 0 0 0 1 Cette fois, dans le
 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 sens vertical, on
 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 peut lire H à l'envers
 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 dans la dernière co-
 1 0 1 1 1 1 0 0 lonne du Fanion
 1 1 0 0 1 0 gauche de C et S à
 0 1 1 1 l'envers, dans la pre-
 1 0 mière colonne du
 ↑ ↑ Fanion droit de H.
 H S

Ces propriétés se démontrent aisément par récurrence, à partir de séquences à deux bits, puis de quatre bits, etc..., sur des Fanions de plus en plus gros (on peut aisément en programmer les modèles formels sur n'importe quel micro-ordinateur) :

Toute séquence de bits S dont la longueur (nombre de bits) est une puissance de 2, traitée par différences logiques successives dans un Fanion, possède deux transformées uniques C et H. Ces trois séquences forment un système binaire ternaire (un comble!) qui possède des propriétés essentielles.

La théorie en a été décrite - toutefois pas sous la forme des Fanions - dans des publications spécialisées. Les expressions mathématiques complètes ou, mieux, les théorèmes, exprimés directement sous forme d'expressions exécutables donc vérifiables sur ordinateur (dont le cadre dépasse le but du présent exposé, se reliant aux transformations orthogonales, aux intégrales de Riemann-Liouville, ainsi qu'à toutes les lois connues de la physique) se trouvent dans [1].

On a plutôt cherché ici à présenter l'intégré-différenciation binaire en liaison étroite avec les travaux essentiels de Maupertuis, à l'occasion de la tenue du Colloque de l'UITF en Ile-et-Vilaine, en insistant sur l'aspect pédagogique : des notions, abstraites et fort rébarbatives à traiter à l'aide d'équations, se simplifient alors considérablement.

Le Fanion s'épluche sur ces trois côtés comme un oignon : on peut ôter une ou plusieurs rangées depuis l'extérieur: il conserve ses propriétés.

Mais il est temps d'expliquer ce qu'est une intégration binaire.

L'intégration binaire ou le Fanion à l'envers (Le Fcation)

Avant d'aborder l'intégration en binaire, regardons l'intégration discrète classique sur une suite d'entiers : si l'intervalle élémentaire Δx correspond à une unité, l'intégrale définie sur une suite d'entiers est simplement sa somme (symbolisée habituellement par la lettre grecque sigma majuscule, provenant "étymologiquement") de la lettre S comme Somme, de même que le signe utilisé pour l'intégrale des fonctions). Exemple très simple :

7 -6 1 3 1 2 -5 6 [a] dont la somme vaut 9.

Mais, pour trouver ce 9, il a fallu nécessairement additionner tous les entiers (dans un ordre quelconque); effectuons cette addition comme un cumul (somme propagée) de gauche à droite; on obtient, en écrivant tous les résultats intermédiaires terme à terme en dessous de [a]:

7 1 2 5 6 8 3 9 [b] donc : 7, 7-6, 7-6+1, etc...

Considérons alors la parité (0 si le nombre est pair, 1 s'il est impair), terme à terme, de [a]

1 0 1 1 1 0 1 0 [c]

Cumulons ces parités, toujours de gauche à droite

1 1 2 3 4 4 5 5 [d] et reprenons-en les parités :

1 1 0 1 0 0 1 1 [e] puis les différences binaires

0 1 1 1 0 1 0 [f] successives : il suffit donc
d'écrire ce début de fanion

pour s'apercevoir que [f] est identique à [c] dont on aurait omis le premier terme. Mais [e] contient les parités de [b].

Ces propriétés se démontrent aisément par récurrence, pour toute séquence de bits (ou de parités) : on appellera intégrale binaire indéfinie la séquence de bits (ici [e]) obtenue par propagation de la somme entière modulo 2 (ou propagation de la somme arithmétique avec prise de parité ensuite terme à terme), sur la séquence initiale (ici [c]). Comme pour la suite entière [a], dont la somme était le dernier terme de [b], on appellera intégrale binaire définie le dernier terme à droite de l'intégrale binaire indéfinie (ici le 1 à droite de [e], si [e] est l'intégrale binaire indéfinie de [c]).

Construisons le Fcation (l'anti-Fanion). Celui-ci s'écrit de bas en haut, en commençant par l'intégrale binaire indéfinie

I1 comme dernière ligne, l'intégrale (binaire indéfinie) I2 de I1, etc.... jusqu'à I8 comme première ligne.

I8:	1 0 1 1 1 0 1 0	Notons au passage que toute séquence
I7:	1 1 1 0 0 1 1 1	binaire codant n'importe quel signal
I6:	1 0 0 1 0 1 0 0	ou n'importe quelle forme est, a
I5:	1 1 0 1 1 1 1 0	priori infiniment intégrable, qui
I4:	1 0 1 1 0 0 0 1	plus est (cette expression de la
I3:	1 1 1 0 1 0 0 1	langue française étant elle-même un
I2:	1 0 0 1 1 1 0 1	comble lorsqu'il s'agit d'une inté-
I1:	1 1 0 1 0 0 1 1	gration!) sans aucun effort.

S :	1 0 1 1 1 0 1 0	Une comparaison avec le Fanion ini-
D1:	1 1 0 0 1 1 1	tial, écrit antérieurement et répété
D2:	0 1 0 1 0 0	ici, fait apparaître une identité
D3:	1 1 1 1 0	totale de tous les termes présents
D4:	0 0 0 1	dans le Fanion, avec ceux présents
D5:	0 0 1	au même endroit dans le Fcation,
D6:	0 1	plus chargé en bits, car il est
D7:	1	carré. Bien entendu, pour composer cet exemple, on a choisi la suite

d'entiers [a] de telle sorte que ses parités correspondent à la séquence de bits initialement proposée pour construire le Fanion mais les propriétés observées sont générales.

(La terminologie Fanion/Fcation provient de la Chimie, avec laquelle les présents modèles ont un rapport hors de propos avec le présent article; les périodes des couches électroniques de l'atome selon le modèle de Niels Bohr apparaîtront reliées à ce qui va être exposé maintenant; voir aussi l'Appendice.)

En outre, la Nième intégrale (nous laisserons tomber dorénavant les épithètes "binaire indéfinie") de toute séquence est la séquence elle-même si N est une puissance de 2 {1, 2, 4, 8, 16, 32, ...}. La règle générale veut que si N est la longueur significative d'une séquence, c'est-à-dire comptée à partir du premier 1 à gauche (comme pour les nombres, les zéros à gauche n'ayant aucune importance), la période des intégrales

(ou des différentielles) c est toujours la plus petite puissance de 2 non inférieure à N.

Ces propriétés affectant maintenant des nombres ne sont qu'une simple conséquence du principe de moindre action généralisé qui moule le destin d'un signal quelconque, intégrale après intégrale. Il va modéliser sous la forme d'un algorithme simple, unique, et toujours exact, ce qui sera susceptible d'arriver à toute séquence d'information, physique ou non.

Donnons-en une description plus aisée - dans ce qui suit, les mots "différent" et "différence" auront toujours exclusivement (encore un comble!) trait à la différence logique, autrement dit l'exclusion :

Pour toute information ou séquence de bits S, l'intégrale I se reformule et s'obtient comme :

le premier terme de S (qui devient donc le premier terme de I),

suivi de la différence entre ce premier terme de I
et le second terme de S,

suivi de la différence entre ce second terme de I
et le troisième terme de S,

et ainsi de suite... jusqu'à la fin de la séquence (si cette dernière n'est pas infinie).

Dès que le second terme de I_1 est connu, il est possible d'entreprendre une seconde intégration qui va donner I_2 , puis d'entreprendre, avec le même décalage, la troisième qui va donner I_3 etc.... alors que l'intégration initiale continue à se propager sur S comme une première vague, suivie des vagues successives, exactement comme le montrerait une vue d'avion au-dessus de la belle plage de Dinard.

La MAG réalise un flux d'intégrations, une marée quantique, pouvant apparaître de loin comme continue si les molécules d'eau, comme les bits, sont indiscernables par l'observateur. Ce flux quantique va, au passage, satisfaire le principe d'incertitude de Heisenberg, redéfinissant donc le pouvoir séparateur, et redémontrant, sans aucune formule, divers théorèmes relatifs à l'échantillonnage, de la topologie algébrique de Poincaré (fin du XIXe) à la théorie mathématique de la communication de Shannon (1949)).

Il ne reste plus qu'à comprendre le cœur de la MAG :

L'algorithme étant le même, "toujours et partout", quelle que soit la complexité de la séquence S, l'étude du cœur se résume à celle des quatre cas possibles pour tout couple ou dipôle binaire (A,B) lorsque l'intégration (ou l'interaction) se propage par exemple de gauche à droite, donc de A vers B

Etat initial		Etat suivant	
A	B	A	B
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Au vu de cette table, on exprimera le cœur du principe de Moindre Action Généralisée, par le couple de phrases :

Si A est récessif (donc vaut 0), ne rien faire;

Si A est dominant (donc vaut 1), faire basculer B, autrement dit, inverser sa parité.

La MAG se ramène alors à l'application la plus simple imaginable, la prise de négatif, c'est-à-dire la

vérifier sur des centaines d'intégrales successives...) Selon nous, comme exposé en [1] et dans d'autres publications, parues ou en cours, concernant des applications aux formes naturelles, à la Génétique [2], à la Théorie du signal et à bien d'autres domaines, l'expression {3} ci-dessus, c'est-à-dire la propagation de la différence logique (ou P.A.S : Propagation Asymétrique de la Parité), représente le noyau de la formulation discrète nécessaire pour décrire de manière complète et au niveau quantique le plus fondamental (le bit étant le quantum d'information) l'Interaction Élémentaire, remplaçant les formules (incomplètes et basées sur l'axiome de continuité) proposées jusqu'ici pour la génération des formes fractales de la Nature et surtout des bruits semi-corrélés, dits en $1/f$ (dont il n'existe toujours pas de modèle satisfaisant [3]) mais aussi pour la Théorie Unitaire du Champ. Voir le dernier article d'Einstein à ce sujet [4] (1950), expliquant les difficultés rencontrées en algèbre tensorielle pour aborder les ordres supérieurs et les raisons théoriques de rendre les tenseurs asymétriques.

Le noyau algorithmique applique une fonction symétrique (OU EXCLUSIF) de manière asymétrique, à cause de la propagation qui crée la chiralité (différence entre la droite et la gauche, bâbord ou tribord, comme on le voit dans le Fanion). La brisure de symétrie d'un Big Bang permanent se reflète dans la Polarisation (Malus), l'isométrie optique (Pasteur) et... notre propre comportement. La MAG est à la fois le spineur de Dirac, l'extension dynamique du principe (d'exclusion) de Pauli, la "machine à différence" de Babbage, et le modèle de l'influx nerveux, une sorte de "Perceptron" de Papert & Minsky, corrigé par l'asymétrie, prévue par Einstein. C'est aussi un processus de Fibonacci (voir [1]), ce qui ne se voit pas au premier regard, car les physiciens, mathématiciens et biologistes n'ont pas l'habitude de raisonner en binaire! C'est encore un transformateur, beaucoup plus efficace que les algorithmes habituels (Fourier, Hadamard, Morland), chaque vague d'intégration étant une ondelette binaire, capable de transformer (et de comprimer) une information perçue (son, langage, vision) à la fois dans les DEUX sens, à l'endroit et à l'envers. La meilleure preuve, par exemple pour les spécialistes du signal, ou ceux du traitement d'image, résulte de la proposition suivante, aisément vérifiable :

Toute Séquence S est le code de Gray de son Intégrale I.

Ceci signifie que le Fcation contient tous les codes de Gray possibles découlant les uns des autres dans ses lignes successives. Les "connoisseurs" (comme on disait encore à l'époque de Maupertuis) de la notation d'Iverson, comme Peele [5], ont déjà, aux Etats-Unis, obtenu et enseigné les codes de Gray de cette façon depuis longtemps. Une conséquence immédiate est que le Fcation devient le modèle idéal de l'holographie discrète (voir les travaux de Gabor), mais cette fois sans équations. Un cerveau fonctionnant selon ce principe aurait des capacités fantastiques! Il est probable, mais encore difficilement vérifiable expérimentalement, que le nôtre fonctionne effectivement ainsi, sans rien d'autre que des cumuls de différences de signaux élémentaires (binaires, le couple actif/inactif) propagés dans de nombreuses directions. Huygens, à l'époque de Newton (Traité de la Lumière, 1678) avait déjà remarqué que nous ne percevions que des différences et non pas des absolus. Il n'est aucunement besoin de pondérer les neurones comme on le fait dans les modèles artificiels : en binaire, les seuls "poids statistiques" possibles sont 0 (absence) et 1 (présence); le regroupement de plusieurs de ces bits en nombres pour obtenir des échelles pondérées ou des distributions de probabilités d'états résulte uniquement d'habitudes provenant d'une méconnaissance des propriétés de l'algèbre binaire :

En binaire, toutes les matrices des modèles applicables à la physique sont, effectivement, holographiques; tous les systèmes intégro-différentiels possibles contiennent déjà leur propre solution exacte, même s'ils sont immenses : ils sont tous linéaires. Le "calcul" matriciel devient simple (l'inversion et la diagonalisation se réduisent à des peaux de chagrin, l'étude des symétries aussi).

Si la prise en considération des phénomènes naturels aboutit couramment à une non-linéarité apparente, la raison en est simple : les problèmes sont mal posés le Principe de Maupertuis n'a été appliqué, lors de l'établissement des équations initiales, qu'à un nombre d'ordres insuffisant; les équations au deuxième ordre sont effectivement suffisantes pour décrire correctement un modèle à deux corps, d'où les succès de Newton, Maxwell, Hamilton puis Schrödinger (du moins pour la description de l'atome d'hydrogène). Mais

Laplace et surtout Poincaré savaient déjà qu'on ne pouvait pas facilement intégrer un système à 3 corps, voire à N corps. Pour ce dernier cas, le modèle du Fcation montre qu'il faut opérer sur c niveaux, auquel cas la c ème intégrale reproduira toujours l'original, même si N vaut... des milliards de milliards.

Quand on calcule a priori, par une arithmétique traditionnelle, l'énergie nécessaire pour fabriquer un gigantesque Fcation relatif à un univers fini, donc son coût, on estimera le nombre de passages d'un bit au suivant (avances d'un cran dans la séquence S ou nombre de "IF", et, si N est une puissance de deux, on a $c=N$) et le nombre d'actions élémentaires à effectuer, les basculements de parité, actions efficaces, (le nombre de "NOT" proportionnel au nombre de 1 moyen, "masse pesante" m des séquences), on retombera sur la formule essentielle d'Einstein... (voir [1]).

Tout système périodique ou sous-périodique est également descriptible par des cosinus, des relations arithmétiques, des exponentielles complexes ou des quaternions. En raisonnant en binaire pur, avec le Fcation, le simple fait qu'un système reproduise son état initial exige qu'aucune dégradation de son information, donc aucune augmentation d'entropie, n'intervienne au cours de la "fabrication" des états intermédiaires; en se limitant à l'Algèbre de Boole et à ses quatre fonctions à un argument, on s'aperçoit que seule la négation logique permet de respecter cette condition d'isentropie; l'identité la respecte aussi, par définition, mais ne permet pas au système d'évoluer. En passant aux 16 fonctions de Boole à deux arguments, l'isentropie exige de n'utiliser que des fonctions dont la Table de Vérité sera symétrique, donc des fonctions ni absorbantes ni semi-absorbantes : seules deux sont acceptables, le OU EXCLUSIF ou sa négation l'EGALITE logique. On pourra donc a priori décrire tous les systèmes périodiques possibles en binaire à l'aide de l'une quelconque de ces trois fonctions retenues et seulement celles-là. Or, la négation conditionnelle exprimée par l'algorithme de la MAG par {1} ou {2} est strictement équivalente au OU EXCLUSIF retrouvé par ce dernier raisonnement. L'utilisation de l'EGALITE LOGIQUE produirait seulement... un anti-Univers illogique dans lequel la vérité serait fautive et les masses cachées (0) pesantes! Tenons-nous là une réponse à une question que les physiciens se posent depuis longtemps ?

Du côté mathématique pur, le gros "os" était le théorème de Gödel (1931). Une étude approfondie, confirmée par un dialogue avec des mathématiciens (C. Cortet et F. Gourdin-Servenièrre) auxquels l'auteur adresse ses remerciements, semble montrer que ce théorème reste indémontrable si l'on n'admet pas d'abord la Théorie des Nombres. Cela prouverait qu'une axiomatique indépendante de cette Théorie, ne serait pas soumise audit théorème : elle serait donc cohérente dans tous les cas. Laissons le lecteur juge en ce qui concerne la logique de la Moindre Action exposée ici, dans laquelle il n'intervient qu'un couple élémentaire 0 et 1, et une seule opération. On peut prévoir de beaux débats en perspective.

Appendice. Détails sur C, H et les Fcations.

C s'appelle C pour "transformée Cognitive de S".

H s'appelle H pour "transformée Hélicoïdale de S".

Du fait que tous les Fcations sont périodiques, on peut les considérer comme des structures pseudo-cylindriques d'information, en raccordant la ligne du haut à la suite de la ligne du bas. La dernière colonne à droite contenant C devient un pseudo-anneau, sans début ni fin, une espèce de mémoire torique, à partir de laquelle on peut reconstituer en entier le Fcation si le reste est détruit. Biologiquement, C est l'ADN circulaire du Fcation, capable de se couper comme le vrai...

H qui était la diagonale du Fcation devient alors une hélice à partir de laquelle on peut aussi reconstituer le Fcation en entier si le reste est détruit. Biologiquement, H est un brin de l'ADN du Fcation. Le lecteur pourra vérifier aisément la propriété suivante :

Soit H l'hélice opposée sur le cylindre de tout Fcation, donc, dans un Fcation de période c , celle qui débiterait non pas sur la première ligne (à gauche de I8 sur l'exemple à 8 bits), mais sur la $(c/2 + 1)$ ème

ligne (à gauche de I4). Cette hélice opposée constitue le deuxième brin de la double hélice. Dans tout Fcation, les deux moitiés gauches des deux brins contiennent toujours la même information. Quant aux deux moitiés droites, leur différence logique bit à bit est exactement identique à l'information de la moitié gauche. Les deux brins de la double hélice contiennent trois demi-séquences d'information différentes, de longueur $c/2$, une à gauche, répétée donc dans les deux brins, et deux à droite; la différence logique étant sa propre fonction inverse, chaque demi-séquence est en fait la différence logique des deux autres. Cette conséquence de la MAG capable de structurer automatiquement l'information en double hélice avec de telles propriétés est capitale, car elle correspond effectivement à ce que trouvent les biologistes et aux modèles qu'ils proposent.

Voici le plus petit F-cation significatif, celui de la séquence élémentaire 1 0 (masse pesante/masse cachée, présence/absence):

(chaque ligne est ici l'intégrale et la différentielle I2 : 1 0
de l'autre). I1 : 1 1

Ce simple modèle représente les deux seuls états possibles de tout système à deux parités primordiales. Il suffit d'injecter la notation adéquate pour s'en apercevoir \uparrow et \downarrow pour des spins opposés (quarks, électrons, magnétons), X et Y pour des chromosomes sexuels, etc... et le système décrit les observables au niveau primordial de leur différenciation :

\uparrow	\downarrow	Etat Fondamental (voir Pauli)	X Y	Homme
\uparrow	\uparrow	Etat Excité	X X	Femme

Mais on montre aussi que ce même Fcation est la plus petite matrice fractale possible.

Exercices

1. Composer le Fcation d'une masse pesante 1 suivie de 127 masses cachées (0) et envoyer le résultat sur un écran graphique en mettant un point noir pour 1 et un point blanc pour 0. Ouvrir n'importe quel livre sur les fractals et trouver le nom du mathématicien Polonais qui proposa cette construction aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris il y a 70 ans. (On pourra, dans ce but, utiliser les noyaux de la MAG {1}, {2} ou {3}. Ils sont suffisants).
2. Trouver la matrice inverse de ce Fcation F ; La matrice inverse binaire FI est une matrice qui, multipliée matriciellement modulo 2 par F, va produire une matrice-unité, une matrice pleine de zéros, sauf la diagonale principale qui ne contient que des 1. Note. Cet exercice est beaucoup plus facile qu'il n'y paraît. Avant d'essayer sur un Fcation de 128 lignes et 128 colonnes, il est prudent de s'exercer sur un Fcation plus petit, par exemple sur le Fcation "sexuel" ou génétique : 1 0 dont le modèle formel à deux variables X Y 1 1 opposées X et Y nous concerne tous: X X et en tirer des conclusions sur une généralisation.
3. Former le Fanion (ou le Fcation) d'une séquence quelconque S de 128 bits. En extraire C et H. Trouver les matrices de passage MC et MH permettant d'obtenir C et H à partir de S et réciproquement. Les comparer. Etablir le lien avec les exercices précédents. Note: Pour pratiquer un produit matriciel binaire, il suffit, si l'on ne dispose pas de la notation d'Iverson qui permet de le faire directement sur des matrices binaires avec la plupart des ordinateurs, (dont tous les IBM), en une courte ligne de programme, il suffit d'effectuer un produit matriciel normal (en considérant alors 0 et 1 comme des entiers), puis de prendre le reste de la division entière par 2, terme à terme; même en FORTRAN, PASCAL ou BASIC, cela ne pose aucun problème sinon un gros risque de propagation par troncatures si l'on ne peut pas se restreindre à des entiers ou si l'on utilise un coprocesseur flottant. Quand on a réussi, recommencer avec une séquence de quelques milliers de bits, sinon de quelques millions. Déterminer alors à partir de quelle longueur N de séquence le système informatique et le compilateur utilisés cessent de donner des résultats exacts ou,

simplement, ne permettent pas d'obtenir par exemple C à partir de S et de retrouver S à partir de C, par suite d'une limitation quelconque.

4. Essayer de réfléchir à un moyen rapide de trouver la 1000e intégrale d'une séquence de 2048 bits (ou, en fait, n'importe quelle intégrale Ip), sans calculer les 999 (ou les p-1) précédentes. Note. Malgré les apparences, un tel exercice qui ressemble à une colle ou à un casse-tête, est réalisable sur un vieil Apple II. Il a été mis au point à l'origine sur un vieux QL Sinclair standard, sans aucune mémoire auxiliaire ni disque.

L'auteur espère que ces quelques exercices découlant des idées de Maupertuis appliquées à la lettre, ou, plutôt à l'algèbre binaire, éveilleront la curiosité de mathématiciens chevronnés et d'informaticiens en herbe, et pourront alors inciter quelques responsables à mettre enfin au programme des Concours d'Entrée aux Ecoles d'Ingénieurs, l'algèbre de Boole et les Fractals, alors que ces deux branches essentielles de la connaissance moderne brillent par leur absence dans l'enseignement français de base. Le cocktail des deux, par ses applications potentielles au traitement de l'information et du signal, à la physique, à la biologie, mais aussi à l'électronique, la musique, la linguistique et toutes les disciplines sur lesquelles la MAG n'a pas encore été essayée, sera, comme on peut le pressentir, un cocktail enivrant sinon explosif.

Remerciements. Que soit remercié chaleureusement le Dr. Jean Hainaut, pour l'aide apportée quant à l'analyse de l'œuvre de différents auteurs. Toutes ses notes ont été d'une utilité sans pareille. Egalement, merci à Marcel Locquin qui apporta ses connaissances en Biologie et Physiologie et a mis à disposition une abondante documentation. Claude Cortet a passé des jours à étudier l'algèbre des séquences binaires et a démontré un certain nombre de propriétés capitales. Louis Métayer, Marcel Locquin et Claude Chachaty ont testé sur leurs ordinateurs personnels un certain nombre de modèles créant des formes ou redémontrant les lois de Mendel. Ed Shaw à New York et les élèves du Club d'Informatique de St Pétersbourg, ainsi que T. Scherer à Paris ont testé les automates génétiques. F. Collot, E. Soulié et B. Mailhol à Paris, J. de Kerf à Anvers, A. Kondrashev à Moscou et B. Makeev à Obninsk ont grandement contribué à faire connaître les propriétés de l'intégration binaire en acceptant de publier, de corriger ou de traduire des articles parfois difficiles.

Références

[1] G.A. Langlet, Towards the Ultimate APL-Theory of Everything, Conf. Int. APL92, St Pétersbourg, Russie, APL-Quote-Quad, Association for Computer Machinery (Etats-Unis), Vol. 22, No 1, pp. 118-134. (Juillet 1992).

[2] G.A. Langlet, The Fractal Laws of Genetics, BIOMATH, p. 60-71 (1992).

[3] B. Mandelbrot, Communication personnelle à l'occasion de l'exposé sur le "Panorama de la Recherche sur les Fractals en France", Paris (4/11/1992). (Voir aussi le rapport Lévy-Vehel, INRIA, portant ce titre, à paraître fin 1992).

[4] A. Einstein, On the Generalized Theory of Gravitation, in Science in the 20th Century. Ed. Spéciale de Scientific American (1991), p. 40, reprenant un article majeur d'avril 1950. On y trouve, outre des considérations très précises sur une *nécessaire asymétrie* des tenseurs; dans les extraits suivants que nous traduisons, Maupertuis laisse la place à Ernst Mach (1838-1916) :

"De nouvelles théories sont nécessaires quand nous tombons sur des faits nouveaux que l'on ne peut expliquer par des théories existantes" ... "Il existe une autre motivation plus subtile, d'importance non moindre. Il s'agit du grand effort d'unification et de simplification des prémisses de la théorie dans sa globalité (c'est-à-dire du principe d'économie de Mach, interprété comme un principe logique.)"

Mais Einstein n'a jamais eu à tenir compte de la structure physique et informationnelle de l'ADN et des

chromosomes, puis de la géométrie fractale en même temps que de la gravitation. Or, contrairement à la formulation de Newton, la MAG englobe aussi la répulsion à courte distance directement au niveau du quantum; quand deux 1 (dominants) sont voisins immédiats dans une séquence, et seulement dans ce cas, l'un "repousse" violemment l'autre : un 0 s'intercale. Tout au contraire, quand deux 1 sont séparés par une mer de zéros, tout se passe comme si l'un attirait l'autre à longue distance à travers les zéros (pour les repousser comme par un rebond ou un contre-coup lors de l'ondelette d'intégration suivante) : La MAG n'est pas un approximation de la théorie newtonienne. C'est l'inverse qui apparaît dès qu'on étudie le modèle dynamique résultant, dans lequel les parités cherchent à s'équilibrer au mieux sans jamais y parvenir, sinon en moyenne, c'est-à-dire lorsqu'on ne peut distinguer individuellement ces sauts logiques quantiques; si ces derniers sont susceptibles de se produire dans l'intervalle de temps élémentaire, appelé temps de Planck ($5 \cdot 10^{-43}$ seconde!), alors que nous n'effectuons actuellement des mesures que jusqu'à la femtoseconde, il ne faut pas s'étonner que les états dits quantiques apparaissent comme seulement "probabilistes" et non pas successifs. La perception correcte exigerait un réglage parfait du stroboscope... ou un modèle avec moins de postulats, et si possible, aucun, même pas ceux de Hamilton.

[5] H.A. Peele, Gray codes in APL, APL Quote-Quad, vol. 7, No 3
Association for Computing Machinery, Etats-Unis (1976).

Lectures sur Maupertuis, l'Action et la Moindre Action, et Boole

S. Hildebrandt & A. Tromba, Mathématiques et Formes Naturelles, Belin, Paris; Maupertuis y est cité une douzaine de fois entre les pages 15 et 174. La dernière référence concerne une conférence de Max Planck à la journée Leibniz (Berlin, 29/06/1922) relative à l'œuvre de Leibniz et de von Helmholtz à propos de la Moindre Action.

J. Ehrard, L'Idée de Nature en France à l'aube des Lumières, Flammarion, Paris; pages 99-110 consacrées à Maupertuis.

G.A. Langlet, La Propagation Asymétrique de la Parité, Biomath, No 115, p. 6-42 (sept. 1991).

M.V. Locquin, Quantum d'Action et Quantum de Planck, Biomath, No 117, p. 33-44 (1992).

P. Brunet, 1. Maupertuis, Etude biographique,
2. Maupertuis, L'œuvre et sa place dans la Pensée du XVIIIe siècle, Blanchard, Paris (1929).

J.D. Barrow (université du Sussex), The Theories of Everything,
Clarendon Press, Oxford, ISBN 0-19-853928-2 (1991).

R. Ligonnière, Préhistoire et Histoire des Ordinateurs, Laffont, Paris, ISBN 2-221-052617 (1988).

J. Kuntzmann, Algèbre de Boole, Dunod, Paris (1965). Voir le théorème de Lagrange p. 89, les fonctions indépendantes p. 253, l'écriture galoisienne p. 306.