POLYNÔMES ORTHOGONAUX

R.Coquidé (01/02/2025)

I) Hypothèses, notations et théorèmes de base

Dans cet article on utilisera :

[a,b] : intervalle réel de longueur finie ou non

***w*(x)** : fonction « poids » réelle positive ou nulle continue dans *[a,b]* (sauf peut-être aux extrémités de l'intervalle). Les intégrales des moments du poids $\int_a^b w(x)x^n dx$ **sont supposées** convergentes pour tout entier $n \geq 0$.

(Ceci implique que $\int_a^b w(x)p(x)dx$ converge pour tout polynôme *p(x)*)

$\mathbb{F}_w$(a,b) : ensemble des fonctions réelles telles que

$$\int_a^b w(x)|f(x)|dx \quad \text{et} \quad \int_a^b w(x)f^2(x)dx \quad \text{convergent}$$

(s'il n'y a aucune ambiguïté on notera **$\mathbb{F}$ = $\mathbb{F}_w$(a,b)**)

On dira que **f = g (pp)** si ces 2 fonctions sont égales **« presque partout »** (sauf peut-être en un nombre fini de valeurs de x situées dans **[a,b])**

On a alors :

$$(f = g\ (pp)) \implies \int_a^b w(x)[f(x)-g(x)]dx=0 \quad \text{et}$$

$$(f = g\ (pp)) \iff \int_a^b w(x)[f(x)-g(x)]^2 dx=0$$

S'il n'y a aucune ambiguïté on écrira **f = g** à la place de **f = g (pp)**

Les fonctions « 0 » et « 1 » sont égales (pp) à 0 et 1 respectivement

On utilisera les notations :

f(x)||g(x) signifiant « *égal à une constante multiplicative près* »

Symbole de Kronecker : $\delta_{m,n}=\left\langle \begin{array}{c|l} 1 & si \quad m=n \\ 0 & si \quad m\neq n \end{array} \right\rangle$

Symbole de Pochhammer :

$$\boxed{(a)_n=a(a+1)(a+2)...(a+n-1)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}} \text{ si } \ a\in\mathbb{C}-\{0,-1,-2...-n...\} \ n\in\mathbb{N}$$

$$(a)_0=1 \qquad (0)_0=0 \qquad (1)_n=n!$$

ℕℤℚℝℂ𝔽ℙ𝕀 **Codian October Nine**

Un polynôme est dit « ***unitaire*** » si son coefficient dominant est égal à **1**

c'est-à-dire si $q_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ avec $c_n=1$

Définitions 1 :

C^n[a,b] = {ensemble des fonctions réelles de [a,b] continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n inclus}

Remarque: on a **C^0[a,b] ⊃ C^1[a,b] ⊃ C^2[a,b] ⊃ ... ⊃ C^{n-1}[a,b] ⊃ C^n[a,b]** ⊃⊂∃ ϵ∀

-

Définitions 2 :

$\mathbb{P}$	: ensemble des polynômes (espace vectoriel de dimension infinie)
$\mathbb{P}_N$	: ensemble des polynômes de degrés $\leq$ **N** (E.V de dimension **N+1**)
On a pour $0 \leq K < N$:	$\mathbb{P}_K \subset \mathbb{P}_N \subset \mathbb{P}$ (ce sont des **sous-espaces vectoriels** réels imbriqués)

$\supset \subset \exists \, \epsilon \forall \Sigma$

On notera $E_n=\{0,1,2,\ldots,n\}$ et **$E_{n,i}=E_n$** sauf **i** où **$i \epsilon E_n$**

II) Théorie mathématique générale des polynômes orthogonaux

A) Théorème 1 :

$\mathbb{F}$ a une structure d'ESPACE VECTORIEL sur $\mathbb{R}$ car $\mathbb{F}$ vérifie les axiomes :

(a) Loi de composition interne « + »

Pour toutes fonctions f,g,h de $\mathbb{F}$ et tous les nombres λ et μ de $\mathbb{R}$:

(f + g) + h = f + (g + h)	Associativité
f + 0 = 0 + f	Neutre
f + (-f) = (-f) + f = 0	Fonction opposée
f + g = g + f	Commutativité

(donc $\mathbb{F}$ muni de « + » a une structure de GROUPE ABÉLIEN)

(b) Loi de composition externe « . »

Pour toutes fonctions **f,g** de $\mathbb{F}$ et pour tout nombre **λ** et **μ de** $\mathbb{R}$ **:**

λ.f dans $\mathbb{F}$	
λ.(μ.f) = (λμ).f	Associativité
(λ + μ).f = λ.f + μ.f	Distributivité
λ.(f + g) = λ.f + λ.g	Distributivité
1.f = f	
0.f = 0	(s'il n'y a pas ambiguïté on oubliera le point « . »)

B) Définitions 3 :

On notera :

$$\|f\|^2=\int_a^b w(x)f^2(x)\,dx \quad , \quad \langle f,g\rangle=\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx \quad \text{et} \quad d(f,g)=\|f-g\|$$

pour *f* et *g* dans $\mathbb{F}_w$(a,b)

C) Théorème 2 :

<f,g> existe avec $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2}(\|f+g\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2)$ et $-\|f\|\cdot\|g\|\leq\langle f,g\rangle\leq\|f\|\cdot\|g\|$ (Schwarz)

Démonstrations :

$$\int_a^b w(x)(f(x)\pm g(x))^2dx=\int_a^b w(x)f^2(x)\,dx\pm2\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx+\int_a^b w(x)g^2(x)\,dx\geq0 \Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx\right|<\frac{1}{2}(\|f\|^2+\|g\|^2) \Rightarrow \langle f,g\rangle=\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx \text{ converge.}$$

cqfd et

$$\int_a^b w(x)(f(x)+g(x))^2dx=\int_a^b w(x)f^2(x)\,dx+2\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx+\int_a^b w(x)g^2(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ $2\langle f,g\rangle=\|f+g\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2$

$$\int_a^b w(x)(f(x)+t\,g(x))^2\,dx=\int_a^b w(x)f^2(x)\,dx+2t\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx+t^2\int_a^b w(x)g^2(x)\,dx\geqslant0$$

$\|f\|^2+2t\langle f,g\rangle+t^2\|g\|^2\geqslant0$ trinôme de degré 2 de la variable t avec $\Delta=\langle f,g\rangle^2-\|f\|^2\cdot\|g\|^2\leqslant0$

donc $\langle f,g\rangle^2\leq\|f\|^2\cdot\|g\|^2$ donc $-\|f\|\cdot\|g\|\leq\langle f,g\rangle\leq\|f\|\cdot\|g\|$ cqfd

D) <u>Théorème 3</u> :

$<f,g>= \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$ est un **<u>produit scalaire</u>** (il vérifie les axiomes d'une <u>forme bilinéaire symétrique définie positive</u>) car pour tous *f,g,h* dans $\mathbb{F}$ **et pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$ on a :**

$\langle \lambda f, g\rangle = \langle f, \lambda g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$

$\langle \lambda f + \mu h, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle + \mu\langle h, g\rangle$ forme bilinéaire

$\langle f, \lambda g + \mu h\rangle = \lambda\langle f, g\rangle + \mu\langle f, h\rangle$

$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ symétrique

$\langle f, f\rangle = 0$ <=> *f(x)*=0 (pp) dans [a,b] définie

$\langle f, f\rangle \geq 0$ pour toute ***f*** dans $\mathbb{F}$ positive

si $\langle f, g\rangle = 0$ *f* et *g* sont dites « **orthogonales** »

E) <u>Théorème 4</u> :

$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_a^b w(x) f^2(x) dx$ $\|f\|$ est une <u>Norme</u> sur $\mathbb{F}$ vérifiant les axiomes :

$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

$\|f\| = 0$ <==> f=0 (pp)

$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ produit par une constante

$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ inégalité triangulaire (Minkowski) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Démonstration:
Les 3 premiers axiomes sont évidents, le dernier mérite une démonstration :

$$\|f+g\|^2 = \int_a^b w(x)(f(x)+g(x))^2 dx = \int_a^b w(x) f(x)^2 dx + \int_a^b w(x) g(x)^2 dx^2 + 2\int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\langle f, g\rangle \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2$ (avec l'inégalité de Schwarz)

$\|f+g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2 \Rightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ cqfd

F) Théorème 5 :

$\boxed{d(f,g)=\|f-g\|}$ est une **distance** sur $\mathbb{F}$ car les axiomes suivants sont vérifiés :

$\boxed{d(f,g)\geqslant 0}$

$d(f,g)=d(g,f)$ symétrie

$d(f,g)=0 \iff f=g$ (pp) réflexivité

$d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$ inégalité triangulaire (Minkowski)

$d(\lambda f,\lambda g)=|\lambda|\, d(g,f)$ produit par une constante

Démonstrations :
Les 3 premiers et le dernier sont évidents.
On a $\|F+G\|\leq\|F\|+\|G\|$ (Schwarz) posons F=f-h et G=h-g on obtient :
$\|(f-h)+(h-g)\|\leq\|f-h\|+\|h-g\| \Rightarrow \|(f-g)\|\leq\|f-h\|+\|h-g\| \Rightarrow d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$ cqfd

G) Définitions 4 :

(f_n) $n \in \mathbb{N}$: famille de fonctions
(f_n) $n \leq N$: famille finie de fonctions
(f_n) $<f_n, f_m>=0$: famille (finie ou non) de fonctions orthogonales
(f_n) $<f_n, f_m>=0$, $\|f_n\|=1$: famille (finie ou non) de fonctions orthonormées

H) Définitions 5 :

$\mathbb{P}$: ensemble des polynômes
$\mathbb{P}_N$: ensemble des polynômes de degrés ≤ **N** pour **N** entier ≥ 0
On a pour **0 ≤ K < N :** $\mathbb{P}_K \subset \mathbb{P}_N \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{F}$ (ce sont des **sous-espaces vectoriels** réels imbriqués)
(x^n) $n\in\mathbb{N}$: famille la plus simple de polynômes (base de $\mathbb{P}$)
(x^n) $n\leq N$: famille finie la plus simple de polynômes (base de $\mathbb{P}_N$)

I) Théorème 6 :

Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (création d'une famille de **polynômes orthonormés**):

On pose : $\boxed{p_0=1/\int_a^b w(x)\,dx}$ **=constante** $\Rightarrow$ $\boxed{\|p_0\|=1}$

puis pour n>0 : $\boxed{p_n(x)=\dfrac{[x^n-\sum_{i=0}^{n-1}\langle x^n,p_i\rangle p_i(x)]}{\|x^n-\sum_{i=0}^{n-1}\langle x^n,p_i\rangle p_i(x)\|}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\|p_n\|=1}$

Démonstration :
Vérification : pour $0 \leq m \leq n-1$ on a

$$\langle p_n, p_m\rangle=\frac{[\langle x^n, p_m\rangle-\sum_{i=0}^{n-1}\langle x^n, p_i\rangle\langle p_i, p_m\rangle]}{\|x^n-\sum_{i=0}^{n-1}\langle x^n, p_i\rangle p_i(x)\|}=\frac{[\langle x^n, p_m\rangle-\langle x^n, p_m\rangle\|p_m\|^2]}{\|x^n-\sum_{i=0}^{n-1}\langle x^n, p_i\rangle p_i(x)\|}=0 \Rightarrow \boxed{\langle p_n, p_m\rangle=0}$$

m<n

La famille de polynômes (p_n) $n\in\mathbb{N}$ est orthonormée

Soit **(α_n)** $n\in\mathbb{N}$ une suite de réels non nuls.
($\alpha_n . p_n$) $n\in\mathbb{N}$ est une famille de **polynômes orthogonaux**

Soit **(q_n)** $n\in\mathbb{N}$ une famille de **polynômes orthogonaux**

(p_n) $n\in\mathbb{N}$ où $p_n=\frac{q_n}{\|q_n\|}$ est une famille de polynômes orthonormés

J) <u>Théorème 7</u> :

Si **(p_n)** $n\in\mathbb{N}$ est une **famille de polynômes orthogonaux** pour *[a,b]* et *w(x)* on a :

$$\boxed{\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, dx=0} \quad \text{pour } n>0$$

Démonstration :

$$0=\langle p_0, p_n\rangle=\int_a^b w(x)\, p_0(x)\, p_n(x)\, dx=p_0\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, dx=0 \quad \text{or } p_0=\text{constante}\neq 0$$

donc $\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, dx=0$ cqfd

K) <u>Théorème 8</u> :

Si **(p_n)** $n\in\mathbb{N}$ est une **famille de polynômes orthogonaux** pour *[a,b]* et *w(x)*
tout polynôme *$q_n(x)$* de degré *n* peut s'écrire de manière unique :

$$\boxed{q_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\, p_k(x) \quad \text{avec} \quad c_k=\frac{\langle q_n, p_k\rangle}{\|p_k\|^2}}$$

Démonstration :
les p_k constituent une base de $\mathbb{P}$. Donc les coefficients sont uniques. De plus :

$$\langle q_n, p_k\rangle=\langle\sum_{i=0}^{n} c_i p_i, p_k\rangle=\sum_{i=0}^{n} c_i\langle p_i, p_k\rangle=c_k\langle p_k, p_k\rangle=c_k\|p_k\|^2 \Rightarrow c_k=\frac{\langle q_n, p_k\rangle}{\|p_k\|^2} \quad \text{cqfd}$$

_

L) **Théorème 9 :**

Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **famille de polynômes orthogonaux** pour *[a,b]* et *w(x)* **et si on note** $\boxed{p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k}$ **où** $\boxed{a_n^{(n)}\neq 0}$ **pour tout** *n* ≥ 0

il existe une **relation de récurrence** de la forme :

$$\boxed{x\,p_n(x)=A_n\,p_{n+1}(x)+B_n\,p_n(x)+C_n\,p_{n-1}(x) \text{ où } A_n, B_n, C_n, \text{ sont des constantes}}$$

où $\boxed{A_n=\frac{\langle x\,p_n, p_{n+1}\rangle}{\|p_{n+1}\|^2}=\frac{a_n^{(n)}}{a_{n+1}^{(n+1)}}}$ $\boxed{B_n=\frac{\langle x\,p_n, p_n\rangle}{\|p_n\|^2}=\frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}}-\frac{a_n^{(n+1)}}{a_{n+1}^{(n+1)}}}$

$\boxed{C_n=\frac{\langle x\,p_n, p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|^2}=A_{n-1}\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}}$

Si la famille de polynômes est **orthonormée :** $\boxed{C_n=A_{n-1}}$

Si la famille est normalisée avec le **coefficient du plus haut degré égal à 1**

$\boxed{a_n^{(n)}=1}$ pour tout n, on a alors : $\boxed{A_n=1}$ $\boxed{B_n=a_{n-1}^{(n)}-a_n^{(n+1)}}$ $\boxed{C_n=\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}}$

Démonstrations :

$xp_n(x)$ est de degré **n+1. Donc** $x\,p_n(x)=\sum_{k=0}^{n+1} d_k\,p_k(x)$

Par suite $\langle x\,p_n, p_i\rangle=0$ quand **i > n+1**

$\langle x\,p_n, p_i\rangle=\langle p_n, x\,p_i\rangle=0$ quand n > i+1 c'est-à-dire i < n-1

Donc $\langle x\,p_n, p_i\rangle\neq 0$ uniquement pour **i ∊ {n+1,n,n-1}**

Donc $\langle x\,p_n, p_{n+1}\rangle=\langle\sum_{k=0}^{n+1} d_k\,p_k(x), p_{n+1}\rangle=d_{n+1}\langle p_{n+1}, p_{n+1}\rangle \Rightarrow d_{n+1}=\frac{\langle x\,p_n, p_{n+1}\rangle}{\|p_{n+1}\|^2}$

$\langle x\,p_n, p_n\rangle=\langle\sum_{k=0}^{n+1} d_k\,p_k(x), p_n\rangle=d_n\langle p_n, p_n\rangle \Rightarrow d_n=\frac{\langle x\,p_n, p_n\rangle}{\|p_n\|^2}$

$\langle x\,p_n, p_{n-1}\rangle=\langle\sum_{k=0}^{n+1} d_k\,p_k(x), p_{n-1}\rangle=d_{n-1}\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle \Rightarrow d_{n-1}=\frac{\langle x\,p_n, p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|^2}$

Seuls d_{n+1} , d_n , d_{n-1} sont non nuls. On pose $A_n=d_{n+1}$, $B_n=d_n$, $C_n=d_{n-1}$ d'où

$$x\,p_n(x)=A_n\,p_{n+1}+B_n\,p_n+C_n\,p_{n-1} \text{ , } A_n=\frac{\langle x\,p_n, p_{n+1}\rangle}{\|p_{n+1}\|^2} \text{ , } B_n=\frac{\langle x\,p_n, p_n\rangle}{\|p_n\|^2} \text{ , } C_n=\frac{\langle x\,p_n, p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|^2}$$

cqfd

En identifiant les puissances *n+1* et *n* de *x* on obtient :

x^{n+1} **:** $a_n^{(n)}=A_n a_{n+1}^{(n+1)} \Rightarrow A_n=\frac{a_n^{(n)}}{a_{n+1}^{(n+1)}}$ cqfd

x^n **:** $a_{n-1}^{(n)}=A_n a_n^{(n+1)}+B_n a_n^{(n)} \Rightarrow B_n=\frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}}-A_n\frac{a_n^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}=\frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}}-\frac{a_n^{(n+1)}}{a_{n+1}^{(n+1)}}$ cqfd

$C_n=\frac{\langle x\,p_n, p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|^2}=\frac{\langle p_n, x\,p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|^2}=A_{n-1}\frac{\langle p_n, p_n\rangle}{\|p_{n-1}\|^2}=A_{n-1}\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}$ cqfd

Si la famille est orthonormée $\|p_n\|=\|p_{n-1}\|=1 \Rightarrow C_n=A_{n-1}$ cqfd

Si la famille est normalisée avec 1 pour coefficient de plus haut degré :

$$a_n^{(n)}=a_{n-1}^{(n-1)}=a_{n+1}^{(n+1)}=1 \Rightarrow A_n=1 \quad , \quad B_n=a_{n-1}^{(n)}-a_n^{(n+1)} \quad , \quad C_n=\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}$$ cqfd

M) <u>Théorème 10</u> :

Si (p_n) **n∈ℕ** est une <u>famille de polynômes orthonormés</u> pour *[a,b]* et *w(x)* **on a la 1^{ère}** <u>**identité de Christoffel-Darboux**</u> **:**

$$\boxed{(x-y)\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\,p_k(y)=A_n[p_{n+1}(x)\,p_n(y)-p_{n+1}(y)\,p_n(x)]}$$

Si la famille est <u>orthogonale</u> sans être orthonormée :

$$\boxed{(x-y)\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k(x)\,p_k(y)}{\|p_k\|^2}=\frac{A_n}{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}[p_{n+1}(x)\,p_n(y)-p_{n+1}(y)\,p_n(x)]}$$

Démonstration :
On multiplie par *$p_n(y)$* la relation de récurrence précédente puis on échange ***x*** et ***y*** :

$$x\,p_n(x)\,p_n(y)=A_n\,p_{n+1}(x)\,p_n(y)+B_n\,p_n(x)\,p_n(y)+C_n\,p_{n-1}(x)\,p_n(y)$$
$$y\,p_n(x)\,p_n(y)=A_n\,p_{n+1}(y)\,p_n(x)+B_n\,p_n(x)\,p_n(y)+C_n\,p_{n-1}(y)\,p_n(x)$$

on soustrait en remarquant que $C_n=A_{n-1}$:

$$(x-y)\,p_n(x)\,p_n(y)=A_n(p_{n+1}(x)\,p_n(y)-p_{n+1}(y)\,p_n(x))-A_{n-1}(p_n(x)\,p_{n-1}(y)-p_n(y)\,p_{n-1}(x))$$

on remplace ***n*** par ***k*** et on somme entre **1** et ***n*** et on simplifie

$$\sum_{k=0}^{n}(x-y)\,p_k(x)\,p_k(x)=A_n(p_{n+1}(x)\,p_n(y)-p_{n+1}(y)\,p_n(x))-A_0(p_1(x)\,p_0-p_1(y)\,p_0)$$

or $A_0(p_1(x)\,p_0-p_1(y)\,p_0)=A_0\,p_0\,a_1^{(1)}(x-y)=\dfrac{a_0^{(0)}}{a_1^{(1)}}\,p_0\,a_1^{(1)}(x-y)=(x-y)\,p_0(x)\,p_0(y)$ d'où

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\,p_k(y)=A_n[p_{n+1}(x)\,p_n(y)-p_{n+1}(y)\,p_n(x)]$$ cqfd

N) <u>Théorème 11</u> :

Si (p_n) **n∈ℕ** est une <u>famille de polynômes orthonormés</u> pour *[a,b]* et *w(x)* **on a la 2ème** <u>**identité de Christoffel-Darboux**</u> **:**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x)=A_n[p'_{n+1}(x)\,p_n(x)-p'_n(x)\,p_{n+1}(x)]}$$

Si la famille est <u>orthogonale</u> sans être orthonormée :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^2(x)}{\|p_k\|^2}=\frac{A_n}{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}[p'_{n+1}(x)\,p_n(x)-p'_n(x)\,p_{n+1}(x)]}$$

Démonstration :
On utilise la 1^e relation de **Chritoffel-Darboux** sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\,p_k(y)=A_n\frac{[p_{n+1}(x)\,p_n(y)-p_{n+1}(y)\,p_n(x)]}{(x-y)}$$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y)=A_n[\frac{p_{n+1}(x)p_n(y)-p_{n+1}(y)p_n(y)}{(x-y)}-\frac{p_{n+1}(y)p_n(x)-p_{n+1}(y)p_n(y)}{(x-y)}]$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y)=A_n[\frac{p_{n+1}(x)-p_{n+1}(y)}{(x-y)}p_n(y)-\frac{p_n(x)-p_n(y)}{(x-y)}p_{n+1}(y)]$$ et quand $y \to x$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x)=A_n[p'_{n+1}(x)p_n(x)-p'_n(x)p_{n+1}(x)]$$ cqfd

O) <u>Théorème 12</u> :

Si (p_n) $n\in\mathbb{N}$ est une **famille de polynômes orthogonaux** pour *[a,b]* et *w(x)*
le polynôme $p_n(x)$ a n racines réelles, distinctes situées toutes dans $]a,b[$
Il en résulte que pour tout n : $p_n(a)\neq 0$ et $p_n(b)\neq 0$

Démonstration :

On a $\int_a^b w(x)p_n(x)dx=0$ quand **n > 0 $p_n(x)$ s'annule au moins 1 fois dans** $]a,b[$

soit x_1 x_2... x_k les points de $]a,b[$ où s'annule $p_n(x)$
posons $q_k(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_k)$. On a $1 \le k$.
Par l'absurde, supposons que $k < n$.
$P_n(x).q_k(x)$ garde un signe constant dans **[a,b]**

Donc $\int_a^b w(x)p_n(x)q_k(x)dx$ est non nulle. C'est **ABSURDE** car $<p_n,q_k>=0$ si $k < n$.

Par suite, $k=n$ cqfd

P) <u>Théorème 13</u> :

Si (p_n) $n\in\mathbb{N}$ est une **famille de polynômes orthogonaux** pour *[a,b]* et *w(x)*
entre 2 racines consécutives de $p_n(x)$ se trouve une racine de $p_{n-1}(x)$

Démonstration :

Supposons la famille de polynômes orthogonaux normalisée avec les coefficients du terme de degré maxi égal à 1. Cela ne restreint pas la généralité de la démonstration car en multipliant chaque polynôme de la famille par une constante non nulle on ne change pas les racines.

On note $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}x^k$ où $a_n^{(n)}=1$ pour tout **n ≥ 0**

et pour tout **n > 0** $A_n=1$ $B_n=a_{n-1}^{(n)}-a_n^{n+1}$ $C_n=\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}>0$

Il vient $p_0(x)=1$ $p_1(x)=x+a_0^{(1)}$ $p_2(x)=x^2+a_1^{(2)}x+a_0^{(2)}$
La relation de **Christoffel-Darboux** devient

$$p_{n+1}(x)=p_n(x)[x-B_n]-C_np_{n-1}(x)$$

pour n=1 $p_2(x)=p_1(x)[x-B_1]-C_1p_0(x)$ $\Rightarrow$ $p_2(x)=(x+a_0^{(1)})[x-B_1]-C_1$
notons $x_{n,k}$ la **k**ième racine de $p_n(x)$ pour **1 ≤ k ≤ n**

$p_2(x_{1,1})=(x_{1,1}-B_1)p_1(x_{1,1})-C_1$ $\Rightarrow$ $p_2(x_{1,1})=-C_1<0$
$\Rightarrow$ $x_{1,1}$ est donc entre les racines du polynôme du 2e degré $p_2(x)$
c'est-à-dire $x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2}$ $\Rightarrow$ <u>le théorème est juste</u> pour n=2
Par <u>**récurrence**</u>, <u>on le suppose juste jusqu'à un ordre *n-1*</u>
On a $p_n(x)=p_{n-1}(x)[x-B_{n-1}]-C_{n-1}p_{n-2}(x)$ et pour $x=x_{n-1,i}$

$$p_n(x_{n-1,i})=-C_{n-1}p_{n-2}(x_{n-1,i})$$ (car $p_{n-1}(x_{n-1,i})=0$)

Les nombres $p_{n-2}(x_{n-1,i})$ sont alternativement positifs puis négatifs
$p_n(x)$ qui change $n-2$ fois de signe possède $n-2$ racines dans $]x_{n-1,1}, x_{n-1,n-1}[$
$x_{n-1,1} < x_{n-2,1}$ et $p_{n-2}(x_{n-1,1})$ a le signe de $(-1)^{n-2}$
$p_n(x_{n-1,1})$ a le signe de $(-1)^{n-1}$ car $C_{n-1}>0$
Or pour $x<0$ assez grand en module, $p_n(x)$ a le signe de $(-1)^n$
Donc $p_n(x)$ a une racine entre a et $x_{n-1,1}$
On peut montrer de même que $p_n(x)$ a une racine entre $x_{n-1,n-1}$ et b

Et le **théorème est encore vrai à l'ordre n**. Etant vrai pour $n=2 \Rightarrow$ il est vrai pour $n=3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ il est vrai pour tout $n>1$ cqfd

Q) Définition 5 :

On nomme ***Fonction Génératrice*** d'une famille de polynômes une fonction développable en série entière de la manière suivante :

$$\boxed{G(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k\, p_k(x)\, t^k}$$

(Ω_k) $k\in\mathbb{N}$ **étant une suite connue de réels non nuls**

R) Théorème 14 :

Soit $\boxed{G(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k\, p_k(x)\, t^k}$ fonction génératrice d'une famille de polynômes.
(p_k) $k\in\mathbb{N}$ est une famille orthogonale pour $w(x)$ dans $[a,b]$ si et seulement si l'intégrale $I=\int_a^b w(x)G(x,t)G(x,s)dx$ est une fonction du produit (ts).

Démonstration :

$$\langle p_k,p_j\rangle=0 \text{ si } k\neq j \ ; \ I=\int_a^b w(x)G(x,t)G(x,s)dx=\int_a^b w(x)\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k p_k(x)t^k\sum_{j=0}^{\infty}\Omega_j p_j(x)s^j dx$$

$$\Longleftrightarrow \ \langle p_k,p_j\rangle=0 \text{ si } k\neq j \ ; \ I=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\Omega_k\Omega_j t^k s^j\int_a^b w(x)p_k(x)p_j(x)dx \quad \Longleftrightarrow$$

$$\langle p_k,p_j\rangle=0 \text{ si } k\neq j \ ; \ I=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\Omega_k\Omega_j t^k s^j\langle p_k,p_j\rangle \quad \Longleftrightarrow$$

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k\Omega_k t^k s^k\langle p_k,p_k\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad I=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k^2\|p_k\|^2(ts)^k$$ cqfd

S) Théorème 15 :

Si (p_n) $n\in\mathbb{N}$ est une **famille de polynômes orthogonaux** pour $[a,b]$ et $w(x)$ **et si** n **est fixé, le polynôme** $q_n(x)$ **le plus proche d'une fonction** $f(x)\in\mathbb{F}$ **vérifie :**

$$\boxed{q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\, p_k(x)} \quad \text{avec} \quad \boxed{a_k=\frac{\langle f,p_k\rangle}{\|p_k\|^2}}$$

Inégalité de Bessel

et $$\boxed{d^2(f,q_n)=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f,p_k\rangle^2}{\|p_k\|^2}=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^2\|p_k\|^2} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n}a_k^2\|p_k\|^2\leq\|f\|^2}$$

Les a_k sont nommés « ***Coefficients de Fourier de f(x) pour w(x) sur [a,b]*** »

Démonstration :

Les coefficients a_k doivent minimiser la distance $d(q_n,f)$ Il faut donc :

$$0=\frac{\partial}{\partial a_k}d^2(q_n,f)=\frac{\partial}{\partial a_k}\|\sum_{i=0}^{n}a_i p_i-f\|^2=\frac{\partial}{\partial a_k}\langle\sum_{i=0}^{n}a_i p_i-f,\sum_{j=0}^{n}a_j p_j-f\rangle$$

$$0=\frac{\partial}{\partial a_k}[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_i a_j\langle p_i,p_j\rangle-2\sum_{i=0}^{n}a_i\langle p_i,f\rangle+\langle f,f\rangle]=\frac{\partial}{\partial a_k}\{a_k^2\|p_k\|^2-2a_k\langle p_k,f\rangle+\|f\|^2\}$$

$$0=2[a_k\|p_k\|^2-2\langle f,p_k\rangle]\quad\Rightarrow\quad a_k=\frac{\langle f,p_k\rangle}{\|p_k\|^2}\quad \text{cqfd}$$

$$d^2(q_n,f)=\langle\sum_{i=0}^{n}a_i p_i-f,\sum_{j=0}^{n}a_j p_j-f\rangle=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_i a_j\langle p_i,p_j\rangle-2\sum_{i=0}^{n}a_i\langle f,p_i\rangle+\langle f,f\rangle$$

$$0\leq\ d^2(q_n,f)=\sum_{k=0}^{n}a_k^2\langle p_k,p_k\rangle-2\sum_{k=0}^{n}a_k\langle f,p_k\rangle+\langle f,f\rangle=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f,p_k\rangle^2}{\|p_k\|^2}=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^2\|p_k\|^2\quad \text{cqfd}$$

On en déduit aussi $\sum_{k=0}^{n}a_k^2\|p_k\|^2\leq\|f\|^2$ cqfd

T) <u>Théorème 16</u> :

Si (p_n) $n\in\mathbb{N}$ est une famille de polynômes orthogonaux pour *[a,b]* et *w(x)* **et si** ***n*** **est fixé,** le polynôme unitaire $q_n(x)$ de degré *n* ayant la norme minimale est le polynôme unitaire $p_n(x)$.

Démonstration :

On peut écrire $q_n(x)=p_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}c_k p_k(x)$ On a :

$$\|q_n\|^2=\int_a^b w(x)[p_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}c_k p_k(x)]^2=\|p_n\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}c_k c_j\int_a^b w(x)p_k(x)p_j(x)dx$$

$$\|q_n\|^2=\|p_n\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}c_k c_j\|p_k\|^2\delta_{k,j}=\|p_n\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}c_k^{\ 2}\|p_k\|^2$$ minimale si $c_k=0\quad\forall k<n$

c'est-à-dire si $q_n(x)=p_n(x)$ cqfd

U) <u>Théorème 17</u> :

Si (p_n) $n\in\mathbb{N}$ est une famille de polynômes orthogonaux pour *[-a,a]* et *w(x)* fonction paire (*w(-x)=w(x)*) on a : $\boxed{p_n(-x)=(-1)^n p_n(x)}$

$p_{2n}(x)$ ne contient que des **puissances paires de** x

$p_{2n+1}(x)$ ne contient que des **puissances impaires de** x

La famille de polynômes ($r_n(x)=p_{2n}(\sqrt{x})$) $n\in\mathbb{N}$ est **orthogonale** relativement à

$$[0,a^2] \text{ et } w_1(x)=\frac{w(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

La famille de polynômes ($s_n(x)=\frac{p_{2n+1}(\sqrt{x})}{x}$) $n\in\mathbb{N}$ est **orthogonale** relativement à

$$[0,a^2] \text{ et } w_2(x)=w(\sqrt{x})\sqrt{x}$$

Démonstrations :

Si n≠m : $0=\int_{-a}^{+a}w(-x)p_n(x)p_m(x)dx=\int_{-a}^{+a}w(x)p_n(-x)p_m(-x)dx\quad\Rightarrow$

$p_n(-x)=k_n p_n(x)$ **et, en examinant les termes en** x^n ⇒ $k_n=(-1)^n$ cqfd

On a donc $p_{2n}(-x)=p_{2n}(x)$ et $p_{2n}(x)$ ne contient que des puissances paires de x

$p_{2n+1}(-x)=-p_{2n+1}(x)$ et $p_{2n+1}(x)$ ne contient que des puissances impaires de x cqfd
En posant $p_{2n}(x)=r_n(x^2)$ et $p_{2n+1}(x)=xs_n(x^2)$ on obtient pour $n\neq m$:

$$0=\int_{-a}^{+a} w(x)p_{2n}(x)p_{2m}(x)dx=\int_{-a}^{+a} w(x)r_n(x^2)r_m(x^2)dx=2\int_{0}^{+a} w(x)r_n(x^2)r_m(x^2)dx$$ on pose $y=x^2$

$$0=\int_{0}^{a^2}\frac{w(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}r_n(y)r_m(y)dy=\int_{0}^{a^2} w_1(y)r_n(y)r_m(y)dy$$ cqfd

$$0=\int_{-a}^{+a} w(x)p_{2n+1}(x)p_{2m+1}(x)dx=\int_{-a}^{+a} w(x)x^2s_n(x^2)s_m(x^2)dx=2\int_{0}^{+a} w(x)x^2s_n(x^2)s_m(x^2)dx$$

On pose $y=x^2$ $\Rightarrow$ $0=\int_{0}^{a^2} w(\sqrt{y})\sqrt{y}\,r_n(y)r_m(y)dy=\int_{0}^{a^2} w_2(y)r_n(y)r_m(y)dy$ cqfd

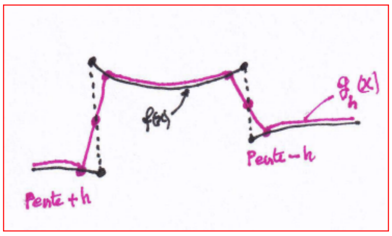
V) <u>Théorème 18</u> :

Si (p_n) $n\in\mathbb{N}$ est une **famille de polynômes orthogonaux** pour $w(x)$ et $[a,b]$ **fini**

et si $f\in\mathbb{F}$ (continue (pp)) on a $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\|p_k\|^2=\|f\|^2}$ avec $\boxed{a_k=\frac{\langle f,p_k\rangle}{\|p_k\|^2}}$ (Parseval)

Si la famille est **orthonormée** : $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2=\|f\|^2}$ avec $\boxed{a_k=\langle f,p_k\rangle}$

Démonstration :



La fonction $f(x)$ peut avoir dans $[a,b]$ un nombre fini de discontinuités de 1e espèce. Soit h un nombre positif arbitrairement grand. On définit une fonction $g_h(x)$ continue, égale à $f(x)$ sauf au voisinage d'un point c de discontinuité de $f(x)$ où elle est égale à une fonction linéaire de pente $+h$ ou $-h$ passant par le point d'ordonnée $y_c=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(c+\varepsilon)+f(c-\varepsilon)}{2}\right]$ (voir figure).

$g_h(x)$ est continue dans $[a,b]$.

$g(c)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(c+\varepsilon)+f(c-\varepsilon)}{2}\right]$ en tout point de discontinuité de $f(x)$.

Et $g_h(x)\to g(x)$ quand $h\to\infty$.$g(x)=f(x)$ en tout point de continuité de $f(x)$.
Donc, pour tout x où $f(x)$ est continue :
Pour tout $\epsilon_1>0$ arbitrairement petit il existe $h=h(x,\epsilon_1)>0$ suffisamment grand tel que $|f(x)-g_h(x)|\leq\epsilon_1$.
Puisque $g_h(x)$ est continue dans $[a,b]$, intervalle fini, on peut lui appliquer le théorème de Wierstrass : on peut approcher $g_h(x)$ sur $[a,b]$ aussi près qu'on le veut par un polynôme $q_m(x)$. C'est-à-dire :
Pour tout $\epsilon_2>0$ arbitrairement petit il existe un entier positif $m=m(\epsilon_2)$ suffisamment grand et un polynôme $q_m(x)$ de degré m tel que $|g_h(x)-q_m(x)|\leq\epsilon_2$ pour tout x dans $[a,b]$.
$\Rightarrow$ Donc, pour tout x où $f(x)$ est continue :
Pour tout $\epsilon_3>0$ arbitrairement petit posons $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3/2$
$|f(x)-q_m(x)|=|[f(x)-g_h(x)]+[g_h(x)-q_m(x)]|\leq|f(x)-g_h(x)|+|g_h(x)-q_m(x)|=2(\epsilon_3/2)=\epsilon_3$

On a $d(f(x),q_m(x))^2=\int_a^b w(x)[f(x)-q_m(x)]^2dx\leq\varepsilon_3^2\int_a^b w(x)dx$ posons $\varepsilon_3=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\int_a^b w(x)dx}}$

Donc pour tout x où $f(x)$ est continue et
pour tout $\epsilon>0$ arbitrairement petit il existe un polynôme $q_m(x)$ tel que $d(f,q_m)\leq\epsilon$.
Or on sait que le polynôme de degré m le plus proche de $f(x)$ est

$q_m(x)=\sum_{k=0}^{m} c_k\, p_k(x)$ avec $c_k=\frac{\langle f, p_k\rangle}{\|p_k\|^2}$ et que

$$d^2(f, q_m)=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{m}\frac{\langle f, p_k\rangle^2}{\|p_k\|^2}=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{m} a_k^2\|p_k\|^2$$

Or $d(f,q_m)\leq\epsilon$ si m est suffisament grand, ϵ étant choisi aussi petit qu'on veut. Par suite quand $\epsilon\to 0$ $m\to\infty$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\|p_k\|^2=\|f\|^2$ cqfd

Et si la famille est orthonormée $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2=\|f\|^2$ cqfd

Remarque :

Si $(p_n(x))$ $n\in\mathbb{N}$ est une famille de polynômes orthogonaux avec $[a,b]$ et $w(x)$ et si (h_n) $n\in\mathbb{N}$ est une suite de réels non nuls la famille de polynômes $(q_n(x))$ $n\in\mathbb{N}$ telle que $q_n(x)= h_n p_n(x)$ est aussi orthogonale avec $[a,b]$ et $w(x)$.

W) **Théorème 19** :

Quadrature de type Gauss

Si $(p_n(x))$ $n\in\mathbb{N}$ est une *famille de polynômes orthogonaux* avec $[a,b]$ et $w(x)$ $x_j^{(n)}$ $, j=0,1,2,3,\ldots,n$ étant les racines de $p_{n+1}(x)$. Pour $f\in\mathbb{F}_w(a,b)$ on a :

$$\boxed{\int_a^b w(x) f(x)\,dx\simeq\sum_{j=0}^{n}\zeta_j^{(n)} f\left(x_j^{(n)}\right)}$$ formule exacte pour $f(x)=q_k(x)$; $k<2n+1$

Les poids sont les « *nombres de Christoffel* »:

$$\boxed{\zeta_j^{(n)}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^2\left(x_j^{(n)}\right)}{\|p_k\|^2}}=\frac{D_n}{p'_{n+1}\left(x_j^{(n)}\right) p_n\left(x_j^{(n)}\right)}}$$ (tous positifs) $\boxed{D_n=\frac{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}{A_{n-1}}}$

Si les polynômes orthogonaux sont unitaires : $\boxed{D_n=\|P_n\|\|P_{n+1}\|}$

Démonstration :

On cherche $\int_a^b w(x) f(x)\,dx=\sum_{j=0}^{n}\zeta_j^{(n)} f(x_j)$ **formule exacte pour** $f(x)=q_k(x)$; $0\leq k\leq 2n$

telle que $x_j\in]a,b[$; $j=0,1,2,3\ldots n$ posons $q_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

et $f(x)=x^m q_{n+1}(x)$; $0\leq m\leq n-1$ $\Rightarrow$ $\int_a^b w(x) x^m q_{n+1}(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j^{(n)} x_j^m q_{n+1}(x_j)=0$

Donc $q_n(x)$ est orthogonal à x^m pour $0\leq m\leq n-1$ $\Rightarrow$ $q_n(x)\,||\,p_n(x)$

Par suite les $x_j^{(n)}\in]a,b[$; $j=0,1,2,3\ldots n$ sont les racines $x_j^{(n)}$ de $p_{n+1}(x)$

On a donc $p_{n+1}(x_j^{(n)})=0$; $j=1,2,3\ldots n$ *cqfd*

Il reste à déterminer les *nombres de Christoffel* $\zeta_j^{(n)}$; $j=1,2,3\ldots n$

Utilisons la 1e formule de Christoffel-Darboux pour $y=x_j^{(n)}$ à l'ordre n

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{p_k(x_j^{(n)})}{\|p_k\|^2}=\frac{A_n}{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}\left[\frac{p_{n+1}(x)p_n(x_j^{(n)})-p_{n+1}(x_j^{(n)})p_n(x)}{(x-x_j^{(n)})}\right]$$ or $p_{n+1}(x_j^{(n)})=0$

On multiplie par $w(x)$ et on intègre de a à b

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k(x_j^{(n)})}{\|p_k\|^2}\int_a^b w(x)p_k(x)dx=\frac{A_n p_{n+1}(x_j^{(n)})}{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}\int_a^b w(x)\frac{p_n(x)}{(x-x_j^{(n)})}dx=\frac{A_n p_{\pm 1}(x_j^{'n})}{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}\sum_{k=0}^{n}\zeta_k q(x_k^{(n)})$$

en posant $q(x)=\frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_j^{(n)})}$ (degré n); $q(x_k^{(n)})=0$ pour $k\neq j$;

$$q(x_j^{(n)})=\lim_{x\to x_j}\frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_j^{(n)})}=p'_{n+1}(x_j^{(n)})$$

et $\int_a^b w(x)p_k(x)dx=0$ si $k>0$; $\frac{1}{\|p_0\|^2}\int_a^b w(x)p_0^2dx=1$ **Il reste donc :**

$$1=\frac{A_n p_n(x_j^{(n)})}{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}\zeta_j p'_{n+1}(x_j^{(n)})$$ or (th 11 pour $x=x_j^{(n)}$ à l'ordre n) :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^2(x_j^{(n)})}{\|p_k\|^2}=\frac{A_n}{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}\left[p'_{n+1}(x_j^{(n)})p_n(x_j^{(n)})-p'_n(x_j^{(n)})p_{n+1}(x_j^{(n)})\right]$$ avec $p_{n+1}(x_j^{(n)})=0$

d'où $$\zeta_j^{(n)}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^2(x_j^{(n)})}{\|p_k\|^2}}=\frac{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}{A_n p'_{n+1}(x_j^{(n)})p_n(x_j^{(n)})}=\frac{D_n}{p'_{n+1}(x_j^{(n)})p_n(x_j^{(n)})}$$

en posant $D_n=\frac{\|p_n\|\|p_{n+1}\|}{A_n}$

Si les polynômes orthogonaux sont unitaires $A_n=1$

donc $D_n=\|p_n\|\|p_{n+1}\|$ cqfd

III) Polynômes orthogonaux classiques

A) Définition 6

Une famille de polynômes orthogonaux relativement à *[a,b]* et *w(x)* **est dite « classique »** si *w(x)* vérifie l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d}{dx}[u(x)w(x)]=v(x)w(x)}$$ avec $\boxed{v(x)=\lambda x+\mu}$ (polynôme de degré 1) et

u(x)=(x-a)(b-x)	si ***a*** et ***b*** sont finis
u(x)=(x-a)	si ***a est fini et b=∞***
u(x)=(b-x)	si ***a=-∞*** et **b est fini**
u(x)=1	si ***a=-∞*** et ***b=∞***

B) Théorème 20 :

w(x) est continûment dérivable et ne peut avoir d'asymptote verticale qu'aux extrémités de l'intervalle *[a,b]*. De plus, pour tout entier *m≥0* :

$$\boxed{\lim_{x\to a}[x^m u(x)w(x)]=0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to b}[x^m u(x)w(x)]=0}$$

Démonstration :
D'après l'équation différentielle

$$u'(x)w(x)+u(x)w'(x)=v(x)w(x) \quad \Rightarrow \quad w'(x)=\frac{w(x)[v(x)-u'(x)]}{u(x)}$$

w(x) est continue dans *]a,b[* (voir I Hypothèses et notations)
v(x)-u'(x) est un polynôme (continu) dans *[a,b]* (voir définition 6)
u(x) est un polynôme (continu) dans *[a,b]* qui ne peut s'annuler qu'aux extrémités de l'intervalle (voir définition 6).
Donc *W'(x)* est continue (sauf peut-être aux extrémités de l'intervalle). cqfd

Pour tout x_1 et x_2 tels que $a<x_1<x_2<b$ et pour tout entier *m≥0* on a :

$$[x^m u(x)w(x)]_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}[x^m u(x)w(x)]dx=\int_{x_1}^{x_2}\{m x^{m-1}u(x)w(x)+x^m[v(x)w(x)]\}dx$$

si $x_1\to a$: $$[x^m u(x)w(x)]_a^{x_2}=\int_a^{x_2}w(x)\{m x^{m-1}u(x)+x^m v(x)\}dx=\int_a^{x_2}w(x)\{q_{m+1}(x)\}dx$$

$$\lim_{x\to a}[x^m u(x)w(x)]=x_2^m u(x_2)w(x_2)-\int_a^{x_2}w(x)\{q_{m+1}(x)\}dx$$ converge

si $x_2\to b$: $$[x^m u(x)w(x)]_{x_1}^{b}=\int_{x_1}^{b}w(x)\{m x^{m-1}u(x)+x\,v(x)\}dx=\int_{x_1}^{b}w(x)\{q_{m+1}(x)\}dx$$

$$\lim_{x\to b}[x^m u(x)w(x)]=x_1^m u(x_1)w(x_1)+\int_{x_1}^{b}w(x)\{q_{m+1}(x)\}dx$$ converge

Donc $\lim_{x\to a}[x^m u(x)w(x)]=Y_m$ **=cste** $\qquad \lim_{x\to b}[x^m u(x)w(x)]=Z_m$ **=cste**

Y_m **et** Z_m sont des constantes dépendant de *m*. Démontrons que $Y_m=Z_m=0$
Par l'absurde supposons que pour un *m* fixé **on ait** $Y_m\neq 0$
1) Si $a=-\infty$

$$Y_{m+1}=\lim_{x\to a}[x\{x^m u(x)w(x)\}]=\pm\infty$$ **absurde ⇒** $Y_m=0$ pour tout *m≥0* cqfd

2) Si *a*=nombre fini

$Y_0 \neq 0$ car $Y_m = a^m Y_0 \Rightarrow w(a) = \pm\infty$ car $w(x) \approx Y_0/u(x) \Rightarrow w(x)$ n'a pas de moments (absurde) $\Rightarrow Y_m = 0$ pour tout $m \geq 0$ cqfd

Par l'absurde on démontre de même que $Z_m = 0$ pour tout $m \geq 0$ cqfd

C) <u>Théorème 21</u> :

Soit une famille $p_n(x)$ de *<u>polynômes orthogonaux classiques</u>* **définis par**

$[a,b]$; $w(x)$; $u(x)$; $v(x)$

a) les dérivées $p_n'(x)$ constituent une famille de *<u>polynômes orthogonaux classiques</u>* définis par :

$[a,b]$; $w_1(x)$; $u_1(x)$; $v_1(x)$

avec $w_1(x) = u(x)w(x)$; $u_1(x) = u(x)$; $v_1(x) = u'(x) + v(x)$

b) les dérivées k[ièmes] $p_n^{(k)}(x)$ constituent une famille de *<u>polynômes orthogonaux classiques</u>* définis par :

$[a,b]$; $w_k(x)$; $u_k(x)$; $v_k(x)$

avec $w_k(x) = u(x)^k w(x)$; $u_k(x) = u(x)$; $v_k(x) = k.u'(x) + v(x)$

Cela implique pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ les formules

$$\boxed{\lim_{x \to a} [x^m u(x) w_k(x)] = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to b} [x^m u(x) w_k(x)] = 0}$$

et les équations différentielles

$$\boxed{\frac{d}{dx}[u(x) w_k(x)] = v_k(x) w_k(x)}$$

Démonstrations :

a) On a $0 = \int_a^b p_n(x) x^{m-1} v(x) w(x) dx$ pour $m<n$ (car $x^{m-1}v(x)$ est un pol. de degré m)

$\Rightarrow 0 = \int_a^b p_n(x) x^{m-1} \frac{d}{dx}[u(x)w(x)] dx$ (d'après définition 6). On intègre par parties :

$$0 = [p_n(x) x^{m-1} u(x) w(x)]_a^b - \int_a^b p_n'(x) x^{m-1} u(x) w(x) dx - (m-1) \int_a^b p_n(x) x^{m-2} u(x) w(x) dx$$

le crochet est nul (th16), la 2[e] intégrale est nulle ($x^{m-2}u(x)$ de degré < n)

$\Rightarrow 0 = \int_a^b p_n'(x) x^{m-1} w_1(x) dx$ (en posant $w_1(x) = u_1(x)w(x)$ et $u_1(x) = u(x)$)

Les pol $p_n'(x)$ de degré $n-1$ sont orthogonaux aux puissances de x inférieures à $n-1$ donc **à** $p_m(x)$ pour $m<n-1$ donc ils constituent une *famille orthogonale* pour $[a,b]$ et $w_1(x)$.

De plus :

$$\frac{d}{dx}[u(x)w_1(x)] = u'(x)w_1(x) + u(x)v(x)w(x) = [u'(x)+v(x)]w_1(x) = v_1(x)w_1(x)$$

où $v_1(x) = [u'(x)+v(x)]$ est un polynôme de degré *1*

Les pol $p_n'(x)$ de degré $n-1$ constituent une *famille orthogonale classique* pour $[a,b]$, $w_1(x)$, $u_1(x)$, $v_1(x)$.

b)Par récurrence il est immédiat que pour les dérivées d'ordre k on a une

famille orthogonale classique pour *[a,b]* , $w_k(x)$, $u_k(x)$, $v_k(x)$ *avec*

$u_k(x)=u_{k-1}(x)=u(x)$, $w_k(x)=u_{k-1}(x)w_{k-1}(x)=u(x)^k w(x)$, $v_k(x)=(k-1)u'(x)+v(x)$

vérifiant $\frac{d}{dx}[u(x)w_k(x)]=v_k(x)w_k(x)$ cqfd

D) <u>Théorème 22</u> :

Les polynômes orthogonaux classiques vérifient :

a	*b*	*u(x)*	*v(x)*	*w(x)*
fini	*fini*	*(x-a)(b-x)*	*λx+μ*	$(b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}$; *α=-[v(b)/(b-a)]-1* ; *β=[v(a)/(b-a)]-1*
fini	∞	*(x-a)*	*λx+μ*	$(x-a)^{\alpha} e^{xv'(x)}$; *α=v(a)-1*
-∞	*fini*	*(b-x)*	*λx+μ*	$(b-x)^{\alpha} e^{-xv'(x)}$; *α=-v(b)-1*
-∞	∞	*1*	*λx+μ*	$e^{\int v(x)dx}=\exp((\lambda/2)x^2+\mu x)$
Contraintes sur ***v(x)*** : ***a fini ⇒ v(a)>0*** ; ***b fini ⇒ v(b)<0*** ; ***λ=v'(x)<0*** ***w(x)*** est définie à une constante près ***k*** arbitraire multiplicative (on choisit ***k*=1**)				

Démonstrations :

Les contenus des colonnes 3 et 4 sont issus de la définition 6

Il reste à démontrer le contenu de la colonne 5 : ***w(x)***

On utilise l'équation différentielle (définition 6) $\frac{d}{dx}[u(x)w(x)]=v(x)w(x)$ ⇔

$$\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{v(x)-u'(x)}{u(x)}$$

1) Si ***a*** et ***b*** sont finis l'équation différentielle devient $\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{v(x)-(a+b)+2x}{(x-a)(b-x)}=\frac{-\alpha}{(b-x)}+\frac{\beta}{(x-a)}$

En multipliant le 2 membres de l'égalité par ***(b-x)*** puis en posant ***x=b*** il reste $\alpha=\frac{-v(b)}{(b-a)}-1$

En multipliant le 2 membres de l'égalité par ***(x-a)*** puis en posant ***x=a*** il reste $\beta=\frac{v(a)}{(b-a)}-1$ ⇒

$$\ln(\frac{w(x)}{k})=\alpha\ln(b-x)+\beta\ln(x-a)=\ln((b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}) \;\Rightarrow\; w(x)=k(b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}$$

(il faut ***α>-1*** et ***β >-1*** pour que $\int_a^b w(x)dx$ converge ⇒ ***v(a)>0*** et ***v(b)<0***) (***k*** arbitraire) cqfd

2) Si ***a*** est fini et ***b***=∞ on obtient $\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{\lambda x+\mu-1}{(x-a)}=\frac{\lambda(x-a)+(\lambda a+\mu)-1}{(x-a)}=\lambda+\frac{\alpha}{(x-a)}$

où $\lambda=v'(x)$ et $\alpha=v(a)-1$ ⇒ $\ln(\frac{w(x)}{k})=\lambda x+\alpha\ln(x-a)$ ⇒ $w(x)=k\,e^{\lambda x}(x-a)^{\alpha}$

(il faut ***λ=v'(x)<0*** et ***α>-1*** pour que $\int_a^{\infty} w(x)dx$ converge ⇒ ***v(a)>0***) cqfd

3) Si ***a***=-∞ et ***b*** est fini on obtient $\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{\lambda x+\mu-1}{(b-x)}=\frac{\lambda(x-b)+(\lambda b+\mu)-1}{(b-x)}=-\lambda-\frac{\alpha}{(b-x)}$

où $\lambda=v'(x)$ et $\alpha=-v(b)-1$ ⇒ $\ln(\frac{w(x)}{k})=-\lambda x+\alpha\ln(b-x)$ ⇒ $w(x)=k\,e^{-\lambda x}(b-x)^{\alpha}$

(il faut $\lambda=v'(x)<0$ et $\alpha>-1$ pour que $\int_{-\infty}^{b} w(x)\,dx$ converge $\Rightarrow v(b)<0$) cqfd

4) Si $a=-\infty$ et $b=+\infty$ on obtient $\frac{w'(x)}{w(x)}=v(x) \;\Rightarrow\; \ln(\frac{w(x)}{k})=\int v(x)\,dx$

$\Rightarrow \quad w(x)=k\,e^{\int v(x)dx}=k\,e^{\int(\lambda x+\mu)dx}=k\,e^{\frac{\lambda x^2}{2}+\mu x}$

(il faut $\lambda=v'(x)<0$ pour que $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx$ converge) cqfd

E) <u>Théorème 23</u> :

Une famille $(p_n(x))\; n\in\mathbb{N}$ de ***polynômes orthogonaux classiques*** relativement à $[a,b]$, $w(x)$, $u(x)$, $v(x)$ vérifie les ***équations différentielles d'ordre 2*** :

$\boxed{u(x)\,p_n''(x)+v(x)\,p_n'(x)+\lambda_n\,p_n(x)=0}$ et $\boxed{\frac{d}{dx}[u(x)w(x)\,p_n'(x)]=-\lambda_n[w(x)\,p_n(x)]}$

où $\boxed{\lambda_n=-n[v'(x)+\frac{1}{2}(n-1)u''(x)]}$ $\lambda_n=cste$

de même pour les dérivées d'ordre m pour $m=0, 1, 2, 3 ...$:

$\boxed{u(x)\,p_n^{(m)''}(x)+v_m(x)\,p_n^{(m)'}(x)+\lambda_{n,m}\,p_n^{(m)}(x)=0}$ et

$\boxed{\frac{d}{dx}[w_{m+1}(x)\,p_n^{(m+1)}(x)]=-\lambda_{n,m}[w_m(x)\,p_n^{(m)}(x)]}$

$\boxed{\lambda_{n,m}=-(n-m)[v'(x)+\frac{1}{2}(n+m-1)u''(x)]}$ $\lambda_{n,m}=cste$ $\lambda_{n,0}=\lambda_n$

Remarque : $v'(x)=cste$ et $u''(x)=0$ pour $b-a=\infty$, $u''(x)=-2$ pour $b-a=$ ***valeur finie***

De plus :

$\boxed{p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k}$ avec $\boxed{\frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}}=n\frac{v_{n-1}(0)}{v_{n-1}'(0)}}$ où $\boxed{v_{n-1}(x)=(n-1)u'(x)+v(x)}$

Démonstrations :

Pour $m<n$ on a $0=\int_a^b (x^m)'\,p_n'(x)u(x)w(x)\,dx$ (on intègre par parties)

$$0=[x^m u(x)w(x)\,p_n'(x)]_a^b-\int_a^b x^m\{u(x)w(x)\,p_n''(x)+v(x)w(x)\,p_n'(x)\}\,dx$$

posons $q_n(x)=u(x)\,p_n''(x)+v(x)\,p_n'(x)$

$0=[x^m w_1(x)\,p_n'(x)]_a^b-\int_a^b x^m\{q_n(x)\}w(x)\,dx$ le crochet est nul, donc l'intégrale aussi

$q_n(x)$ est orthogonal à toute puissance m de x ($m<n$) $\Rightarrow$ $q_n(x)\|p_n(x)$ posons $q_n(x)=-\lambda_n p_n(x)$

on obtient donc $u(x)\,p_n''(x)+v(x)\,p_n'(x)+\lambda_n\,p_n(x)=0$ cqfd $\lambda_n=cste$ (on calcule le coeff. de x^n)

On obtient $\lambda_n=-n[v'(x)+\frac{1}{2}(n-1)u''(x)]$ cqfd

(on multiplie par $w(x)$ cette équation différentielle)

$$0=w(x)[u(x)\,p_n''(x)+v(x)\,p_n'(x)]+\lambda_n w(x)\,p_n(x)$$

$$0=[w(x)u(x)]\,p_n''(x)+[w(x)u(x)]'\,p_n'(x)+\lambda_n w(x)\,p_n(x)$$

$$0=\frac{d}{dx}\{[w(x)u(x)]\,p'_n(x)\}+\lambda_n w(x)\,p_n(x) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}[u(x)w(x)\,p'_n(x)]=-\lambda_n[w(x)\,p_n(x)]$$ cqfd

Cette dernière formule peut s'écrire (avec $w_1(x)=u(x)w(x)$; $w_0(x)=w(x)$; $\lambda_{n,0}=\lambda_n$) :

$\frac{d}{dx}[w_1(x)\,p_n^{(1)}(x)]=-\lambda_{n,0}[w_0(x)\,p_n^{(0)}(x)]$ les dérivées d'ordre m étant également classiques ont a :

$\frac{d}{dx}[w_{m+1}(x)\,p_n^{(m+1)}(x)]=-\lambda_{n,m}[w_m(x)\,p_n^{(m)}(x)]$ où $\lambda_{n,m}=-(n-m)[v'(x)+\frac{1}{2}(n+m-1)u''(x)]$

de même $u(x)\,p_n^{(m)''}(x)+v_m(x)\,p_n^{(m)'}(x)+\lambda_{n,m}\,p_n^{(m)}(x)=0$ cqfd

$u(x)\,p''_n(x)+v(x)\,p'_n(x)+\lambda_n\,p_n(x)=0$ avec :

On a $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$; $p'_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} k\, x^{k-1}$; $p''_n(x)=\sum_{k=2}^{n} a_k^{(n)} k(k-1)\,x^{k-2}$

Posons $u(x)=X+Yx+Zx^2$; $v(x)=U+Vx \Rightarrow$

$$\lambda_n=-n[v'(x)+\frac{1}{2}(n-1)u''(x)]=-n[V+(n-1)Z]$$

où ***X, Y, Z, U, V*** sont des constantes

$$\Rightarrow\; v_{n-1}(x)=(n-1)u'(x)+v(x)=(n-1)(Y+2Zx)+U+Vx=(U+(n-1))Y+(V+2(n-1)Z)x$$

calculons le coefficient de x^{n-1} dans $u(x)\,p''_n(x)+v(x)\,p'_n(x)+\lambda_n\,p_n(x)=0$:

$$Y a_n^{(n)} n(n-1)+Z a_{n-1}^{(n)}(n-1)(n-2)+U a_n^{(n)} n+V a_{n-1}^{(n)}(n-1)+\lambda_n a_{n-1}^{(n)}=0 \;\Rightarrow$$

$$a_n^{(n)} n[Y(n-1)+U]+a_{n-1}^{(n)}[Z(n-1)(n-2)+V(n-1)-V\,n-Z\,n(n-1)]=0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}}=n\frac{U+(n-1)Y}{2(n-1)Z+V}=n\frac{v_{n-1}(0)}{v'_{n-1}(0)}$$ cqfd

F) <u>Théorème 24</u> :

Formules de **Rodrigues**

$$\boxed{p_n(x)=\frac{\Delta_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[u(x)^n w(x)]} \qquad \boxed{p_n^{(m)}(x)=\frac{\Delta_{n,m}}{u(x)^m w(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[u(x)^n w(x)]}$$

$$\boxed{\Delta_n=\frac{n!\,a_n^{(n)}}{A_{n,n}}} =cste \qquad \boxed{A_{n,m}=(-1)^m(\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{n,k})} =cste \qquad \boxed{\Delta_{n,m}=A_{n,m}\Delta_n} =cste$$

$$p_0(x)=\Delta_0 \qquad p_1(x)\parallel v(x) \qquad p_1(x)=\Delta_1\, v(x)$$

Démonstrations :

Une **famille** ***$(p_n(x))$ n∊N*** de ***polynômes orthogonaux classiques*** relativement à ***[a,b], w(x), u(x), v(x)*** vérifie

$$w(x)\,p_n(x)=w_0(x)\,p_n^{(0)}(x)=(\frac{-1}{\lambda_{n,0}})\frac{d}{dx}[w_1(x)\,p_n^{(1)}(x)]=(\frac{-1}{\lambda_{n,0}})(\frac{-1}{\lambda_{n,1}})\frac{d^2}{dx^2}[w_1(x)\,p_n^{(1)}(x)] \;=\ldots$$

$=\ldots=\frac{(-1)^m}{(\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{n,k})}\frac{d^m}{dx^m}[w_m(x)\,p_n^{(m)}(x)]$ on pose $A_{n,m}=(-1)^m(\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{n,k})$ =**cste** d'où :

$$\frac{d^m}{dx^m}[w_m(x)p_n^{(m)}(x)]=A_{n,m}w(x)p_n(x)$$ (on utilise $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}x^k$ et $p_n^{(n)}(x)=n!\,a_n^{(n)}$ avec ***m=n***)

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)^n w(x)n!\,a_n^{(n)}]=A_{n,n}w(x)p_n(x) \Rightarrow p_n(x)=\frac{\Delta_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[u(x)^n w(x)] \text{ où } \Delta_n=\frac{n!\,a_n^{(n)}}{A_{n,n}}$$

cqfd

les valeurs des cstes Δ_n seront fixées lors de la normalisation.

La **famille** ***(*** $p_n^{(m)}(x)$ ***) nϵN*** de ***polynômes orthogonaux classiques*** relativement à ***[a,b], w***$_m$***(x), u(x), v***$_m$***(x)*** vérifie

$$p_n^{(m)}(x)=\frac{\Delta_{n,m}}{w_m(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[u(x)^{n-m}w_m(x)] \quad \Rightarrow \quad p_n^{(m)}(x)=\frac{\Delta_{n,m}}{w_m(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[u(x)^n w(x)]$$

on a posé $\Delta_{n,m}=A_{n,m}\Delta_n$ =cste cqfd

Conséquence : $p_1(x)=\Delta_1\frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[u(x)w(x)]=\Delta_1\frac{1}{w(x)}v(x)w(x)=\Delta_1 v(x)$ cqfd

G) **<u>Théorème 25</u>** :

Les carrés des ***normes des polynômes orthogonaux classiques*** sont :

$$\|p_n\|^2=\int_a^b w(x)p_n^2(x)dx=\int_a^b w(x)p_n(x)x^n dx=(-1)^n a_n^{(n)}\Delta_n n!\int_a^b u(x)^n w(x)dx$$

Démonstration :

$$\|p_n\|^2=\int_a^b w(x)p_n^2(x)dx=\int_a^b w(x)p_n(x)(a_n^{(n)}x^n+q_{n-1}(x))dx=a_n^{(n)}\int_a^b w(x)p_n(x)x^n dx$$

On pose ***F(x)=u(x)***^{n}***w(x) ,*** on utilise les formules de ***Rodrigues*** et $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}x^k$

$$\|p_n\|^2=\int_a^b w(x)p_n(x)^2dx=a_n^{(n)}\int_a^b x^n w(x)p_n(x)dx=a_n^{(n)}\Delta_n\int_a^b x^n\frac{d^n}{dx^n}[u(x)^n w(x)]dx$$

$$\|p_n\|^2=a_n^{(n)}\Delta_n\int_a^b x^n\frac{d^n}{dx^n}[F(x)]dx=a_n^{(n)}\Delta_n I_n$$ avec $I_n=\int_a^b x^n\frac{d^n}{dx^n}[F(x)]dx$ (on intègre par parties)

$$I_n=\left[x^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[F(x)]\right]_a^b-n\int_a^b x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx}[F(x)]dx=-nI_{n-1}$$ car le crochet est nul :

$$\left[x^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[F(x)]\right]_a^b=\left[x^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[u(x)^n w(x)]\right]_a^b=\left[x^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[u(x)w_{n-1}(x)]\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{\Delta_{n,1}}[x^n u(x)w(x)p_n^{(1)}(x)]_a^b=0$$ (d'après le th 17)

Donc ***I***$_n$***=(-n)I***$_{n-1}$***=(-n)(-(n-1))I***$_{n-2}$***=...=(-n)(-(n-1))...(-2)(-1)I***$_0$***=(-1)***^{n}***n!I***$_0$

Or $I_0=\int_a^b F(x)dx$ Par suite $\|p_n\|^2=(-1)^n a_n^{(n)}\Delta_n n!\int_a^b u(x)^n w(x)dx$ cqfd

IV) Polynômes orthogonaux classiques standards

A) Théorème 26 :

Standardisation

Soit $p_n(y)$ une ***famille orthogonale classique*** de polynômes relativement à ***[a,b]***, $u(y), v(y), w(y)$

Avec une transformation affine L : $y=\omega x+\delta$; $x=(y-\delta)/\omega$ on peut réduire à **3** le nombre d'***intervalles standards.***

En choisissant les coefficients ω et δ de la transformation L on obtient (après des calculs simples mais longs) :

Polynômes orthogonaux classiques standards :

[a,b]	*u(x)*	*v(x)*	*w(x)*	*Symboles*	*Polynômes de*
$[-1,+1]$	$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x+(\beta-\alpha)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$	***Jacobi***
$[0,\infty]$	x	$-x+(\alpha+1)$	$e^{-x}x^{\alpha}$	$L_n^{\alpha}(x)$	***Laguerre Généralisés***
$[-\infty,+\infty]$	1	$-2x$	e^{-x^2}	$H_n(x)$	***Hermite***

α et β sont des paramètres réels strictement supérieurs à -1

Cas particuliers :

[a,b]	*u(x)*	*v(x)*	*w(x)*	*Symboles*	*Polynômes de*	Remarques
$[-1,+1]$	$1-x^2$	$-(2\lambda+1)x$	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$	$C_n^{\lambda}(x) \parallel P_n^{\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}}(x)$	***Gégenbauer***	$\lambda>-1/2$ $\alpha=\beta=\lambda-1/2$
$[-1,+1]$	$1-x^2$	$-2x$	1	$P_n(x) \parallel C_n^{\frac{1}{2}}(x) \parallel P_n^{0,0}(x)$	***Legendre***	$\lambda=1/2$ $\alpha=\beta=0$
$[-1,+1]$	$1-x^2$	$-x$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$T_n(x) \parallel C_n^{0}(x) \parallel P_n^{\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}}(x)$	***Tchébychev 1e espèce***	$\lambda=0$ $\alpha=\beta=-1/2$
$[-1,+1]$	$1-x^2$	$-3x$	$(1-x^2)^{1/2}$	$U_n(x) \parallel C_n^{1}(x) \parallel P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x)$	***Tchébychev 2e espèce***	$\lambda=1$ $\alpha=\beta=1/2$
$[0,+\infty]$	x	$1-x$	e^{-x}	$L_n(x) \parallel L_n^{0}(x)$	***Laguerre***	$\alpha=0$

Par application du ***th 16***, en remarquant que les polynômes de ***Hermite*** ont $w(x)$ fonction paire et $[-\infty,+\infty]$ symétrique par rapport à l'origine on peut trouver des relations entre les ***polynômes de Hermite*** et ***de Laguerre généralisés*** :

$$\boxed{H_{2n}(x) \parallel L_n^{\frac{-1}{2}}(x^2) \quad \text{et} \quad H_{2n+1}(x) \parallel x\,L_n^{\frac{1}{2}}(x^2)}$$

(Le symbole **||** signifiant « ***égal à une constante multiplicative près*** »)

B) Remarque :

Soient $p_n(x)$ $n\in\mathbb{N}$ une ***famille orthogonale classique standard*** de polynômes relativement à ***[a,b]***, $u(x), v(x), w(x)$ et (h_n) $n\in$N une suite ***arbitraire*** de réels non nuls la famille de polynômes $(q_n(x))$ $n\in\mathbb{N}$ telle que $q_n(x)=h_np_n(x)$ est aussi ***orthogonale classique standard*** avec ***[a,b]***, $u(x), v(x), w(x)$.

B) __**Calcul des constantes des polynômes orthogonaux classiques standards unitaires**__

Généralités : résumé des formules démontrées

Pour la famille $p_n(x)$ relativement à $[a,b]$, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$; $\boxed{p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k}$ $\boxed{a_n^{(n)}=1}$ (arbitrairement)

$\boxed{v_m(x)=v(x)+m\,u'(x)}$; $\boxed{w_m(x)=w(x)\,u^m(x)}$; $a_n^{(n)}$: coeff. dominant ; $a_{n-1}^{(n)}$: coeff. sous-dominant

[1] $\boxed{\lambda_n=-n\left[v'(x)+\frac{1}{2}(n-1)u''(x)\right]}$

[2] $\boxed{u(x)y''+v(x)y'+\lambda_n y=0\,;\, y=p_n(x)}$

[3] $\boxed{\lambda_{n,m}=-(n-m)\left[v'(x)+\frac{1}{2}(n+m-1)u''(x)\right]}$

[4] $\boxed{u(x)y''+v_m(x)y'+\lambda_{n,m}y=0\,;\, y=p_n^{(m)}(x)}$

[5] $\boxed{A_{n,m}=(-1)^m\left(\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{n,k}\right)}$

[6] $\boxed{\Delta_n=\frac{n!}{A_{n,n}}}$

[7] $\boxed{p_n(x)=\frac{\Delta_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[u(x)^n w(x)\right]}$

[8] $\boxed{\Delta_{n,m}=A_{n,m}\Delta_n}$

[9] $\boxed{p_n^{(m)}(x)=\frac{\Delta_{n,m}}{u(x)^m w(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left[u(x)^n w(x)\right]}$

[10] $\boxed{a_{n-1}^{(n)}=n\frac{v_{n-1}(0)}{v'_{n-1}(0)}}$

[11] $\boxed{\|p_n\|^2=(-1)^n A_{n,n}\Delta_n^2\int_a^b u^n(x)w(x)\,dx}$

[12] $\boxed{A_n=1}$

[13] $\boxed{B_n=a_{n-1}^{(n)}-a_n^{(n+1)}}$

[14] $\boxed{C_n=\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}}$

[15] $\boxed{p_0=\Delta_0}$

[16] $\boxed{p_1(x)=\Delta_1 v(x)}$

[17] $\boxed{p_{n+1}(x)=(x-B_n)p_n(x)-C_n p_{n-1}(x)}$

[18] $\boxed{D_n=\|p_n\|\|p_{n+1}\|}$

$\boxed{x_j^{(n)}}$ $j=0, 1, \ldots, n$ racines de $p_{n+1}(x)$ réelles, distinctes, situées dans $]a,b[$

[19] $\boxed{\zeta_j^{(n)}=\frac{D_n}{p'_{n+1}(x_j^{(n)})\,p_n(x_j^{(n)})}}$

(constantes de Christoffel)

[20] $\boxed{\int_a^b w(x)f(x)\,dx\simeq\sum_{j=0}^{n}\zeta_j^{(n)}f(x_j^{(n)})}$ (Gauss)

(exacte pour $f(x)=q_k(x)$, $k<2n$)

[21] $\boxed{\int_a^b w(x)p_n(x)p_m(x)\,dx=\|p_n\|^2\delta_{n,m}}$

Si **[a,b]** fini on a ***pp*** :

[22] $\boxed{\int_a^b w(x)f^2(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2\,;\, c_n=\int_a^b w(x)f(x)p_n(x)\,dx}$

[23] $\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n p_n(x)}$

Si ***m*** entier >0 fixé : polynôme de degré ***m*** qui minimise $\|f(x)-q_m(x)\|$: [24] $\boxed{q_m(x)=\sum_{n=0}^{m}c_n p_n(x)}$

C) **Polynômes de Jacobi** $P_n^{\alpha,\beta}(x)$

$[-1,+1]$ $u(x)=1-x^2$ $v(x)=-(\alpha+\beta+2)x+(\beta-\alpha)$ $w(x)=(1-x)\alpha(1+x)\beta$ *α,β réels > -1*

$v_m(x)=-(\alpha+\beta+2m+2)x+(\beta-\alpha)$ $w_m(x)=(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}$

$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$ $a_n^{(n)}=1$

$\lambda_n=n(\alpha+\beta+n+1)$ $(1-x^2)y''+[(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(\alpha+\beta+n+1)y=0\,;\, y=P_n^{\alpha,\beta}(x)$

$\lambda_{n,m}=(n-m)(\alpha+\beta+n-m+1)$

$$(1-x^2)y''+[(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2m+2)x]y'+(n-m)(\alpha+\beta+n-m+1)y=0\,;\, y=\frac{d^m}{dx^m}P_n^{\alpha,\beta}(x)$$

$A_{n,m}=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-m+2)}$ $\Delta_n=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$

$\Delta_{n,m}=(-1)^{n-m}\frac{n!}{(n-m)!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}$ $P_n^{\alpha,\beta}(-x)=(-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x)$

$$\frac{d^m}{dx^m}P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(-1)^{n-m}n!}{(n-m)!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}\frac{1}{(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$

$\|P_n^{\alpha,\beta}\|^2=2^{\alpha+\beta+2n+1}n!\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$ $a_{n-1}^{(n)}=\frac{n(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2n)}$

$A_n=1$ $B_n=\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$ $C_n=\frac{4n(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n)}$

$P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)=(x-B_n)P_n^{\alpha,\beta}(x)-C_nP_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)$

D) Polynômes de Laguerre Généralisés $L_n^\alpha(x)$

$[-1,+1]$ $u(x)=x$ $v(x)=(\alpha+1)-x$ $w(x)=e^{-x}x^\alpha$ $v_m(x)=(\alpha+m+1)-x$ $w_m(x)=e^{-x}x^{\alpha+m}$

α réel > **-1** $\quad L_n^\alpha(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}x^k \quad a_n^{(n)}=1$

$\lambda_n=n \Rightarrow xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0\,;\ y=L_n^\alpha(x)$

$\lambda_{n,m}=n-m \Rightarrow xy''+(\alpha+m+1-x)y'+(n-m)y=0\,;\ y=\frac{d^m}{dx^m}L_n^\alpha(x)$

$A_{n,m}=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!} \quad \Delta_n=(-1)^n \quad L_n^\alpha(x)=\frac{(-1)^n e^x}{x^\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^{\alpha+n}]$

$\Delta_{n,m}=\frac{(-1)^{n-m}n!}{(n-m)!} \quad \frac{d^m}{dx^m}L_n^\alpha(x)=\frac{(-1)^{n-m}n!}{(n-m)!}\frac{e^x}{x^{\alpha+m}}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[e^{-x}x^{\alpha+n}]$

$a_{n-1}^{(n)}=-n(\alpha+n) \quad L_0^\alpha(x)=1 \quad L_1^\alpha(x)=-(\alpha+1)+x$

$\|L_n^\alpha\|^2=n!\,\Gamma(\alpha+n+1) \quad \int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)dx=n!\,\Gamma(\alpha+n+1)\delta_{n,m}$

$A_n=1 \quad B_n=(\alpha+2n+1) \quad C_n=n(\alpha+n)$

$L_{n+1}^\alpha(x)=x\,L_n^\alpha(x)-(\alpha+2n+1)L_n^\alpha(x)-n(\alpha+n)L_{n-1}^\alpha(x)$

$D_n=(n-1)!\,\Gamma(\alpha+n)\sqrt{n(n+\alpha)}$

E) Polynômes de Hermite $H_n(x)$

$[-\infty,+\infty]$; $u(x)=1$; $v(x)=-2x$; $w(x)= e^{-x^2}$

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$$

$$a_n^{(n)}=1$$

$v_m(x)=v(x)$; $w_m(x)=w(x)$

$$\lambda_n=2n$$

$$y''-2xy'+2ny=0\,;\ y=H_n(x)$$

$$\lambda_{n,m}=2(n-m)$$

$$y''-2xy'+2(n-m)y=0\,;\ y=H_n^{(m)}(x)$$

$$A_{n,m}=(-1)^m 2^m \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\Delta_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$H_n(x)=(-1)^n \frac{e^{x^2}}{2^n} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$\Delta_{n,m}=(-1)^{n-m} 2^m \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$H_n^{(m)}(x)=(-1)^{n-m} 2^m \frac{n!}{(n-m)!} e^{x^2} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2}$$

$$a_{n-1}^{(n)}=0 \qquad H_0(x)=1 \qquad H_1(x)=x$$

$$\|H_n\|^2=2^{-n} n! \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx=2^{-n} n! \sqrt{\pi}\,\delta_{n,m}$$

$$A_n=1 \qquad B_n=0 \qquad C_n=\frac{n}{2}$$

$$H_{n+1}(x)=x H_n(x)-\frac{n}{2} H_{n-1}(x)$$

$$D_n=\frac{n!}{2^n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

$$H'_n(x)=2^n n H_{n-1}(x)$$

$$\zeta_j^{(n)}=(n-1)!\left[\frac{\pi\, 2^{2n-1}}{n}\right]^{\frac{1}{2}} H_{n-1}^2(x_j^{(n)})$$

$$H_n(x_j^{(n)})=0\,;\ j=1,2,3\ldots n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx \simeq \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$$

$$H_{2m}(x)=\frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} m!} Fh\left(-m; \frac{1}{2}; x^2\right)$$

$$H_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^m (2m+1)!}{2^{2m} m!}\, x\, Fh\left(-m; \frac{3}{2}; x^2\right)$$

Coefficients des polynômes de Hermite unitaires de degrés 0 à 10

0	1										
1	0	1									
2	_1r2	0	1								
3	0	_3r2	0	1							
4	3r4	0	_3	0	1						
5	0	15r4	0	_5	0	1					
6	_15r8	0	45r4	0	_15r2	0	1				
7	0	_105r8	0	105r4	0	_21r2	0	1			
8	105r16	0	_105r2	0	105r2	0	_14	0	1		
9	0	945r16	0	_315r2	0	189r2	0	_18	0	1	
10	_945r32	0	4725r16	0	_1575r4	0	315r2	0	_45r2	0	1

F) Polynômes de Gégenbauer $C_n^{\lambda}(x)$

$[-1,+1]$ $u(x)=1-x^2$ $v(x)=-(2\lambda+1)x$ $w(x)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ $\lambda>\frac{-1}{2}$

$v_m(x)=-(2\lambda+2m+1)x$ $w_m(x)=(1-x^2)^{\lambda+m-\frac{1}{2}}$ $C_n^{\lambda}(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$ $a_n^{(n)}=1$

$\lambda_n=n(2\lambda+n)$ $(1-x^2)y''-(2\lambda+1)x\,y'+n(2\lambda+n)y=0\,;\,y=C_n^{\lambda}(x)$

$\lambda_{n,m}=(n-m)(2\lambda+n+m)$ $(1-x^2)y''-(2\lambda+2m+1)x\,y'+(n-m)(2\lambda+n+m)y=0$

$a_{n-1}^{(n)}=0$ $y=\frac{d^m}{dx^m}C_n^{\lambda}(x)$

$A_{n,m}=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}\frac{\Gamma(2\lambda+n+m)}{\Gamma(2\lambda+2n)}$ $\Delta_n=\frac{(-1)^n\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(2\lambda+2n)}$

$\Delta_{n,m}=\frac{(-1)^{n-m}\Gamma(2\lambda+n+m)n!}{\Gamma(2\lambda+2n)(n-m)!}$

$A_n=1$ $B_n=0$ $C_n=\frac{(2\lambda+n-1)}{4(\lambda+n)\cdot(\lambda+n-1)}$

$C_{n+1}^{\lambda}(x)=x\,C_n^{\lambda}(x)-\frac{(2\lambda+n-1)}{4(\lambda+n)\cdot(\lambda+n-1)}C_{n-1}^{\lambda}(x)$ $C_0^{\lambda}(x)=1$ $C_1^{\lambda}(x)=x$

G) <u>Polynômes de Legendre</u> *$P_n(x)$*

$[-1,+1]$ $\quad$ $u(x)=1-x^2$ $\quad$ $v(x)=-2x$ $\quad$ $w(x)=1$ $\quad$ $v_m(x)=-2(m+1)x$

$w_m(x)=(1-x^2)^m$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \qquad a_n^{(n)}=1$$

$\lambda_n=n(n+1)$ $\qquad$ $(1-x^2)\,y''-2x\,y'+n(n+1)\,y=0\,;\ y=P_n(x)$

$\lambda_{n,m}=(n-m)(n+m+1)$

$(1-x^2)\,y''-2(m+1)x\,y'+(n-m)(n+m+1)\,y=0\,;\ y=P_n^{(m)}(x)$

$$A_{n,m}=(-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

$$\Delta_n=\frac{(-1)^n n!}{(2n)!} \qquad P_n(x)=\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n]$$

$$\Delta_{n,m}=\frac{(-1)^{n-m} n!(n+m)!}{(2n)!(n-m)!} \qquad \frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=\frac{(-1)^{n-m} n!(n+m)!}{(2n)!(n-m)!}\frac{1}{(1-x^2)^m}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[(1-x^2)^n]$$

$$\|P_n\|^2=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n)!^2} \qquad a_{n-1}^{(n)}=0 \qquad P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x$$

$$A_n=1 \qquad B_n=0 \qquad C_n=\frac{n^2}{(4n^2-1)} \qquad P_{n+1}(x)=x\,P_n(x)-\frac{n^2}{(4n^2-1)}P_{n-1}(x)$$

$$D_n=\frac{2^{2n+1}n!^4}{n(2n)!^2}\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} \qquad P_n(x)=\frac{2^n n!^2}{(2n)!}Fh(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2})$$

Coefficients des polynômes de Legendre unitaires de degrés 0 à 10

0	1										
1	0	1									
2	_1r3	0	1								
3	0	_3r5	0	1							
4	3r35	0	_6r7	0	1						
5	0	5r21	0	_10r9	0	1					
6	_5r231	0	5r11	0	_15r11	0	1				
7	0	_35r429	0	105r143	0	_21r13	0	1			
8	7r1287	0	_28r143	0	14r13	0	_28r15	0	1		
9	0	63r2431	0	_84r221	0	126r85	0	_36r17	0	1	
10	_63r46189	0	315r4199	0	_210r323	0	630r323	0	_45r19	0	1

H) <u>Polynômes de Tchébychev 1^e espèce</u> $T_n(x)$

$[-1,+1]$ $u(x)=1-x^2$ $v(x)=-x$ $w(x)=(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$

$v_m(x)=-(2m+1)x$ $w_m(x)=(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}$ $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$ $a_n^{(n)}=1$

$\lambda_n=n^2$ $(1-x^2)y''-x\,y'+n^2 y=0\,;\,y=T_n(x)$

$\lambda_{n,m}=n^2-m^2$ $(1-x^2)y''-(2m+1)x\,y'+(n^2-m^2)y=0\,;\,y=T_n^{(m)}(x)$

$A_{n,m}=(-1)^m n\frac{(n+m-1)!}{(n-m)!}$ $a_{n-1}^{(n)}=0$ $\Delta_n=(-1)^n\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}$

$T_n(x)=\frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-1)!}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}]$ $T_0(x)=1$

$$\frac{d^m}{dx^m}T_n(x)=\frac{(-1)^{n-m}n!(n+m-1)!}{(2n-1)!(n-m)!}\frac{1}{(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}]$$

$\Delta_{n,m}=(-1)^{n-m}\frac{n!(n+m-1)!}{(n-m)!(2n-1)!}$

$\|T_n\|^2=\frac{\pi}{2^{2n-1}}$ $\|T_0\|^2=\pi$ $T_n(x)\cdot T_m(x)=T_{n+m}(x)+\frac{1}{2^{2m}}T_{n-m}(x)\,si\,0<m<n$

$A_n=1$ $B_n=0$ $C_n=\frac{1}{4n}$ $T_{n+1}(x)=x\,T_n(x)-\frac{1}{4}T_{n-1}(x)$ $T_0(x)=1$ $T_1(x)=x$

$D_n=\frac{\pi}{2^{2n}}$ $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}Fh(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2})$ si n >0

Coefficients des polynômes de Tchebychev unitaires de 1^e espèce de degrés 0 à 10

0	1										
1	0	1									
2	_1r2	0	1								
3	0	_3r4	0	1							
4	1r8	0	_1	0	1						
5	0	5r16	0	_5r4	0	1					
6	_1r32	0	9r16	0	_3r2	0	1				
7	0	_7r64	0	7r8	0	_7r4	0	1			
8	1r128	0	_1r4	0	5r4	0	_2	0	1		
9	0	9r256	0	_15r32	0	27r16	0	_9r4	0	1	
10	_1r512	0	25r256	0	_25r32	0	35r16	0	_5r2	0	1

Autre méthode de définition des polynômes de Tchebychev de 1^e^ espèce

On pose $x=\cos(\theta)$; $\theta=\mathrm{Arcos}(x)$; $0 \le \theta \le \pi$; $-1 \le x \le 1$ et $t_n(x)=t_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$ *On obtient :*

$t_0(x)=1$ $t_1(x)=x$ $t_2(x)=2x^2-1$ $t_3(x)=4x^3-3x$ $t_4(x)=8x^4-8x^2+1$ etc.

Plus généralement, $\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)=2\cos(n\theta)\cos(\theta)$

soit $t_{n+1}(x)+t_{n-1}(x)=2xt_n(x)$ $\Rightarrow$

$t_{n+1}(x)=2xt_n(x)-t_{n-1}(x)$

Le coefficient dominant de $t_n(x)$ *est* 2^{n-1} à partir de $n=1$

Posons $t_0(x)=T_0(x)$ et $t_n(x)=2^{n-1}T_n(x)$ il vient *:*

$$2^nT_n(x)=2x2^{n-1}T_n(x)-2^{n-2}T_{n-1}(x)$$

$\Rightarrow$ $T_{n+1}(x)=xT_n(x)-T_{n-1}(x)/4$ *cqfd*

$\cos(n\theta).\cos(m\theta)=(1/2)[\cos((n+m)\theta)+\cos((n-m)\theta)]$ $\Rightarrow$

$2^{n-1}T_n(x).2^{m-1}T_m(x)=(1/2)[2^{n+m-1}T_{n+m}(x)+2^{n-m-1}T_{n-m}(x)]$

$\Rightarrow$ $T_n(x).T_m(x)=T_{n+m}(x)+T_{n-m}(x)/2^{2m}$ *cqfd*

(ce sont les formules de récurrence pour les polynômes de **Tchebychev** de 1^e^ espèce).

Norme

Pour n=0 :

En résumé :

$T_0(x)=1$ $T_1(x)=x$
et pour $n>0$: $T_n(x)=2^{1-n}\cos(n\theta)$
$-1 \le x \le 1$ $x=\cos(\theta)$ $\theta=\mathrm{Arcos}(x)$ $0 \le \theta \le \pi$
le ***coefficient dominant*** de $T_n(x)$ est *1 (polynôme unitaire)*
Racines de $T_n(x)$: $x_k=\cos((2k+1)\pi/2n)$ pour $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$
$T_n(x)$ possède $n+1$ optimums égaux à $\pm 2^{1-n}$ (alternativement positifs et négatifs) aux abscisses $x_k=\cos(k\pi/n)$ pour $k=0\ 1\ 2\ \ldots n$
si $n \ge 2$: $T_{n+1}(x)=xT_n(x)-T_{n-1}(x)/4$
si $n > m \ge 1$: $T_n(x).T_m(x)=T_{n+m}(x)+T_{n-m}(x)/2^{2m}$

I) Polynômes de Tchébychev 2^e^ espèce $U_n(x)$

$[-1,+1]$ $\quad u(x)=1-x^2$ $\quad v(x)=-3x$ $\quad w(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$v_m(x)=-(2m+3)x$ $\quad w_m(x)=(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}$ $\quad U_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$ $\quad a_n^{(n)}=1$

$\lambda_n=n(n+2)$ $\quad (1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0\,;\, y=U_n(x)$ $\quad a_{n-1}^{(n)}=0$

$\lambda_{n,m}=(n-m)(n+m+2)$ $\quad (1-x^2)y''-(2m+3)xy'+(n-m)(n+m+2)y=0\,;\, y=U_n^{(m)}(x)$

$\Delta_n=(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{(2n+1)!}$ $\quad U_n(x)=\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(2n+1)!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}]$

$\Delta_{n,m}=(-1)^{n-m}\dfrac{n!(n+m+1)!}{(n-m)!(2n+1)!}$

$$\frac{d^m}{dx^m}U_n(x)=\frac{(-1)^{n-m}n!(n+m+1)!}{(2n+1)!(n-m)!}\frac{1}{(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}]$$

$\|U_n\|^2=\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$

$A_n=1$ $\quad B_n=0$ $\quad C_n=\dfrac{1}{8n(2n-1)}$ $\quad U_{n+1}(x)=xU_n(x)-\dfrac{1}{8n(2n-1)}U_{n-1}(x)$

$U_0(x)=1$ $\quad U_1(x)=x$ $\quad D_n=\dfrac{\pi\sqrt{2n(2n+1)}}{2^{2n}(2n)!}$

$U_n(x)=\dfrac{(n+1)}{2^n}Fh(-n,n+2;3r2;\dfrac{1-x}{2})$ $\quad D_n=\dfrac{\pi}{2^{2n+2}}$

Coefficients des polynômes de Tchebychev unitaires de 2^e^ espèce de degrés 0 à 10

0	1										
1	0	1									
2	_1r4	0	1								
3	0	_1r2	0	1							
4	1r16	0	_3r4	0	1						
5	0	3r16	0	_1	0	1					
6	_1r64	0	3r8	0	_5r4	0	1				
7	0	_1r16	0	5r8	0	_3r2	0	1			
8	1r256	0	_5r32	0	15r16	0	_7r4	0	1		
9	0	5r256	0	_5r16	0	21r16	0	_2	0	1	
10	_1r1024	0	15r256	0	_35r64	0	7r4	0	_9r4	0	1

J) Polynômes de Laguerre $L_n(x)$

$[-1,+1]$ $\quad u(x)=x$ $\quad v(x)=1-x$ $\quad w(x)=e^{-x}$ $\quad v_m(x)=(m+1)-x$ $\quad w_m(x)=e^{-x}x^m$

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \qquad a_n^{(n)}=1$$

$$\lambda_n=n \quad \Rightarrow \quad x\,y''+(1-x)\,y'+n\,y=0\,;\; y=L_n(x)$$

$$\lambda_{n,m}=n-m \quad \Rightarrow \quad xy''+(m+1-x)\,y'+(n-m)\,y=0\,;\; y=\frac{d^m}{dx^m}L_n(x)$$

$$A_{n,m}=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!} \qquad \Delta_n=(-1)^n \qquad L_n(x)=(-1)^n e^x\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n]$$

$$\Delta_{n,m}=\frac{(-1)^{n-m}n!}{(n-m)!} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^m}{dx^m}L_n(x)=\frac{(-1)^{n-m}n!}{(n-m)!}\frac{e^x}{x^m}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[e^{-x}x^n]$$

$$a_{n-1}^{(n)}=-n^2 \qquad L_0(x)=1 \qquad L_1(x)=-1+x$$

$$\|L_n\|^2=n!^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty e^{-x}L_n(x)\,L_m(x)\,dx=n!^2\,\delta_{n,m}$$

$$A_n=1 \qquad B_n=(2n+1) \qquad C_n=n^2$$

$$L_{n+1}(x)=x\,L_n(x)-(2n+1)\,L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$$

$$D_n=n!(n+1)! \qquad L_n(x)=(-1)^n n!\,Fh(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2})$$

Coefficients des polynômes de LAGUERRE unitaires de degrés 0 à 10

0	1										
1	−1	1									
2	2	−4	1								
3	−6	18	−9	1							
4	24	−96	72	−16	1						
5	−120	600	−600	200	−25	1					
6	720	−4320	5400	−2400	450	−36	1				
7	−5040	35280	−52920	29400	−7350	882	−49	1			
8	40320	−322560	564480	−376320	117600	−18816	1568	−64	1		
9	−362880	3265920	−6531840	5080320	−1905120	381024	−42336	2592	−81	1	
10	3628800	−36288000	81648000	−72576000	31752000	−7620480	1058400	−86400	4050	−100	1

V) SCRIPT

```
NB. POLORTHO.ijs
BPP =: 9!:11
BPP 16
NB. ****************************************************************
NB. Dans ce qui suit, NOMPOLYNOME peut être :
NB. LEGENDRE, TCHEBYCHEV1, TCHEBYCHEV2, HERMITE, LAGUERRE
NB. ****************************************************************

NB. Intervalle standard d'utilisation
NB. I =. NOMPOLYNOME INTERVALLE
        INTERVALLE=:{{)a
select. 5!:5 <'u'
case. 'LEGENDRE' do. _1 1x
case. 'LAGUERRE' do. 0x, _
case. 'TCHEBYCHEV1' do. _1 1x
case. 'TCHEBYCHEV2' do. _1 1x
case. 'HERMITE' do. __, _ end.}}


NB. Fonction-poids associée à NOMPOLYNOME
NB. W=: NOMPOLYNOME POIDS
        POIDS=:{{)a
select. 5!:5 <'u'
case. 'LEGENDRE' do. 1:
case. 'LAGUERRE' do. ^@-
case. 'TCHEBYCHEV1' do. %@%:@-.@*:
case. 'TCHEBYCHEV2' do. %:@-.@*:
case. 'HERMITE' do. ^@-@*: end.}}


NB. Fonction polynomiale unitaire de degré N
NB. associée à NOMPOLYOME exprimée avec
NB. les fonctions hypergéométriques
NB. R=.(NOMPOLYNOME FONCTION N) y
        FONCTION =: {{)c
N=.x:n
select. 5!:5 <'u'
case. 'LEGENDRE' do. N FLEGENDRE y
case. 'LAGUERRE' do. N FLAGUERRE y
case. 'TCHEBYCHEV1' do. N FTCHEBYCHEV1 y
case. 'TCHEBYCHEV2' do. N FTCHEBYCHEV2 y
case. 'HERMITE' do. N FHERMITE y end.
}}
```

NB. Calcul des coefficients d’un polynôme unitaire de degré N
NB. ***C=. NOMPOLYNOME COEFF N***
COEFF =: {{{:u x:y}}

NB. Calcul des racines d’un polynôme NOMPOLYNOME de degré N
NB. ***R=. NOMPOLYNOME RACINES N***
RACINES =: {{/:~>{:p.{:u x:y}}

NB. Calcul des coefficients du développement de x^N dans la base
NB. des polynomes NOMPOLYNOME de degrés 0 à N (N entier positif ou nul)
NB. X^N=d0.p0 + d1.p1(x)...+dN.Pn(x)
NB. D=d0 d1 ... dN
NB. ***D =. NOMPOLYNOME DEVXN N***
DEVXN =: {{{:%.u x:y}}

NB. Soit un polynôme de coefficients C=c0 c1 ... cn
NB. Calcul des composantes dans la base des NOMPOLYNOME
NB. d0.po + d1.p1(x) ... +dn.pn(x)
NB. D=.d0 d1 ... dn
NB. ***D =. NOMPOLYNOME DEVPOL C***
DEVPOL =: {{y PM%.u x:<:#y}}

NB. Calcul des coefficients C = c0 c1...cn d'un polynome en fonction
NB. des coefficients D=d0 d1 ... dn suivant la base NOMPLOYNOME
NB. ***C =. NOMPOLYNOME COEFFPOL D***
COEFFPOL=:{{y PM u x:<:#y}}

NB. Calcul des nombres de Christoffel d'ordre N
NB. ***R=. NOMPOLYNOME CHRISTOFFEL N***
CHRISTOFFEL=:{{)a
c=.u COEFF N [dc1=.p.. u COEFF N1=.>:N=.x:y
(%:(u NORME2 N1)*(u NORME2 N))%(c p. rac)*(dc1 p. rac =. u RACINES N1)}}

NB. Calcul de l'intégrale de W(x)*x^N sur [a,b] standard
NB. ***R =. NOMPOLYNOME WXN N***
WXN =:{{)a
POL=.5!:5 <'u' [N=. x: y
if. POL-:'LAGUERRE' do. !N return. end.
if. 1=2|N do. 0x else.
select. POL
case. 'LEGENDRE' do. 2x%>:N

```
case. 'TCHEBYCHEV1' do. 1r2 Feuler -:>:N
case. 'TCHEBYCHEV2' do. 3r2 Feuler -:>:N
case. 'HERMITE' do. Feuler -:>:N end.end.}}"0


NB. Calcul du carré des normes des polynômes orthogonaux
NB. R= Intégrale sur intervalle standard de w(x).(x^N).pn(x)
NB. R=. NOMPOLYNOME NORME2 N
        NORME2 =:{{)a
C=.u COEFF N [ K=.i.N1=.>:N=.x:y [ R=.0x
for_k. K do.R=.R+(k{C)*u WXN N+k end. R}}


NB. IDEM : Le résultat est le produit des 2 nombres obtenus
NB. R=. NOMPOLYNOME  NORME2EXACTE  N
        NORME2EXACTE =: {{)a
select. POL=.5!:5 <'u' [ N=.x:y
case. 'LEGENDRE'       do. R1=.'1x'     [ R2=. (2x^>:+:N)*(*:*:!N)%(*:!+:N)*>:+:N
case. 'TCHEBYCHEV1' do. R1=.'1p1'    [ R2=. (2x^-<:+:N)%1x+0x=N
case. 'TCHEBYCHEV2' do. R1=.'1p1'    [ R2=. 2x^->:+:N
case. 'LAGUERRE'       do. R1=.'1x'     [ R2=. *:!N
case. 'HERMITE'          do. R1=.'1p1r2' [ R2=. (!N)%2x^N end. R1;R2 }}

NB. Fonctions polynomiales déduites des polynômes unitaires (de degré N) de
NB. LEGENDRE TCHEBYCHEV1 TCHEBYCHEV2 LAGUERRE HERMITE
NB. exprimées en utilisant les fonctions hypergéométriques
NB. R=. N   FNOMPOLYNOME  y
        FLEGENDRE =:{{((2x^N)*(*:!N)%!+:N)*(((-N),(>:N=.x:x))H.1x)-:-.y}}"0 0
        FTCHEBYCHEV1 =:{{if. 0=x do. 1x else. (2x^>:-N)*(((-N),N=.x:x)H.1r2)-:-.y end.}}"0 0
        FTCHEBYCHEV2 =:{{if. 0=x do. 1x else. (2x^-N)*(>:N)*(((-N),2x+N=.x:x)H.3r2)-:-.y
end.}}"0 0
        FLAGUERRE =:{{(_1x^N)*(!N)*((-N=.x:x)H.1x)y}}"0 0
        FHERMITE =:{{((_1x^L)*(!+:L)%(!L)*(2x^+:L))*(>:z*<:N*y)*((-L=.<.-:N)H.
(1r2+z=.2x|N=.x:x))*:y}}"0 0


NB. Calcul des coefficients des polynômes unitaires de degrés d de 0 à N
NB. R=.  NOMPOLYNOME  N

        LEGENDRE=:{{)m
if. y=0 do. R=. 1 1 $ 1x return. end.
if. y=1 do. R=. 2 2$ 1 0 0 1x return. end.
R=.2 2$ 1 0 0 1x [ I=. >:i.<:x:y
for_i. I do.R=.(R,.0x),(0x,_1{R)-((*:i)%<:4x**:i)*((_2{R),0x) end.
R}}
```

```
        TCHEBYCHEV1=:{{)m
if. y=0 do. R=. 1 1 $ 1x return. end.
if. y=1 do. R=. 2 2$ 1 0 0 1x return. end.
R=.2 2$ 1 0 0 1x [ I=. >:i.<:x:y
for_i. I do.R=.(R,.0x),(+:0x,_1{R)-((_2{R),0x) end.
R%(<0 1)&|:R}}

        TCHEBYCHEV2=:{{)m
if. y=0 do. R=. 1 1 $ 1x return. end.
if. y=1 do. R=. 2 2$ 1 0 0 1x return. end.
R=.2 2$1 0 0 2x [ I=.>:i.<:x:y
for_i. I do.R=.(R,.0x),(+:0x,_1{R)-((_2{R),0x) end.
R%(<0 1)&|:R}}

        HERMITE=:{{)m
if. y=0 do. R=. 1 1 $ 1x return. end.
if. y=1 do. R=. 2 2$ 1 0 0 1x return. end.
R=.2 2$1 0 0 1x [ I=.>:i.x:<:y
for_i. I do. R=.(R,.0x),(0x,_1{R)-(-:i)*(_2{R),0x end.
R}}

        LAGUERRE=:{{)m
if. y=0 do. R=. 1 1 $ 1x return. end.
if. y=1 do. R=. 2 2$ 1 0 0 1x return. end.
R=.2 2$1 0 _1 1x [ I=.>:i.<:x:y
for_i. I do. R=.(R,.0x),(0x,_1{R)-((>:+:i)*(_1{R),0x)+(*:i)*((_2{R),0x) end.
R}}
```